РГАСНТИ 27.13.15; 27.15.25; 27.17.31; 27.21 ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 64

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1989

1—5645

УДК 517.951+517.954+517.956.227+517.984

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ—7

Консультирующий редактор-составитель
доктор физико-математических наук *М. А. Шубин*

Рецензент
доктор физико-математических наук *М. С. Агранович*

1*

Научный редактор-составитель тома
С. А. Вахрамеев

Авторы
Г. В. Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин

УДК 517.951+517.954+517.956.227+517.984

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. В. Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Спектральная теория операторов в конечномерном пространстве впервые возникла при описании частот малых колебаний механических систем (см. [6]). При рассмотрении колебаний струны возникает простейшая задача на собственные значения для дифференциального оператора. В случае однородной струны здесь достаточно использовать классическую теорию рядов Фурье, а для неоднородной струны возникает необходимость рассмотрения общей задачи Штурма — Лиувилля. Она представляет собой задачу на собственные значения для простейшего одномерного дифференциального оператора с переменными коэффициентами и, не будучи явно решаемой, нуждается в качественном и асимптотическом исследовании (см. [64, § 8]). При рассмотрении колебаний мембраны и трехмерных упругих тел мы приходим к задачам на собственные значения для многомерных дифференциальных операторов. Эти задачи возникают также в теории оболочек, гидродинамике и других разделах механики. Богатейшим источником задач спектральной теории, чаще всего операторов Шрёдингера, является квантовая механика, где собственные значения квантового гамильтониана и, более общо, точки его спектра суть возможные значения энергии системы.

Эта статья содержит обзор различных аспектов спектральной теории многомерных линейных дифференциальных операторов (в основном, самосопряженных). Некоторые, сравнительно элементарные вопросы этой теории кратко изложены в предыдущих томах [64], [65] этой серии. Мы ни в коей мере не претендуем на полноту как изложения, так и библиографии. В частности, мы ограничивается лишь изложением L_2-теорни, оставляя в стороне все, что касается спектральной теории дифференциальных операторов в негильбертовых функциональных пространствах. Мы не затрагиваем также столь важных для приложений вопросов, как теория рассеяния, обратные задачи спектральной теории, разложения по собственным функциям; каждая из этих тем заслуживает отдельной статьи.

Различные части статьи написаны с разной степенью подробности и полноты. В частности, § 1—4, 7, 8 в значительной степени носят вводный характер. Бо́льшей степени полноты мы стремились достичь в разделах, относящихся к более современным вопросам. Определенную роль здесь сыграли личные научные интересы авторов.

Материал § 1—14 написан Г. В. Розенблюмом и М. З. Соломяком; в написании § 13, 14 участвовал также Ю. Г. Сафаров, которому авторы выражают глубокую благодарность. § 16, 20 написаны Г. В. Розенблюмом, § 15, 17—19 — М. А. Шубиным.

Авторы благодарят М. С. Аграновича, В. Я. Иврия, С. З. Левендорского, Л. А. Малоземова, С. А. Молчанова, Я. Г. Синая и Д. Р. Яфаева, прочитавших рукопись или отдельные ее части и сделавших ряд полезных замечаний.

В статье применяются стандартные мультииндексные обозначения. Как обычно, $D_{x_j}=-i\partial/\partial x_j$; H^r — пространство Соболева; буквой c (часто без индекса) обозначаются различные постоянные.

§ 1. Некоторые сведения из теории операторов в гильбертовом пространстве

В спектральной теории дифференциальных операторов систематически используется язык общей теории операторов (в первую очередь — неограниченных) в гильбертовом пространстве. Здесь мы приведем список основных понятий и терминов, а также формулировки некоторых утверждений из теории операторов, используемых в дальнейшем. Систематическое изложение см., например, в [8], [27], [222], [268], [283].

1.1. Линейные операторы. Замкнутые операторы. Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $D\subset\mathfrak{H}$ — линейное подмножество и $A: D\to\mathfrak{H}$ — линейное (не обязательно непрерывное) отображение. Для краткости говорят, что A — *линейный оператор* в $\mathfrak{H}$; множество D обозначается $D(A)$ и называется *областью определения оператора*. Если $D(A)=\mathfrak{H}$ и оператор A ограничен, то пишут $A\in B(\mathfrak{H})$. Если D_0 — линейное подмножество в D, то оператор $A_0=A|D_0$ (другое обозначение $A\restriction D_0$ называется сужением оператора A; оператор A при этом называется *расширением* оператора A_0. Обозначение: $A_0\subset A$.

На $D(A)$ определяется *норма графика* или *A-норм* $\|\cdot\|_A$:

$$\|x\|_A^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2,\quad x\in D(A). \tag{1.1}$$

Оператор A называется *замкнутым*, если $D(A)$ полно по отношению к A-норме. Равносильное определение: A замкнут, если его *график* $\mathcal{G}(A)=\{\{x, y\}\in\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}: x\in D(A),\ y=Ax\}$ замкнут в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$. Оператор A *допускает замыкание*, если замыкание в $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ его графика само является графиком некоторого оператора. Это равносильно тому, что если последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in D(A)$, фундаментальна по A-норме и $\|x_n\|\to 0$, то обязательно $\|x_n\|_A\to 0$. Последнее свойство выражает согласованность топологий на $D(A)$, порождаемых нормой пространства $\mathfrak{H}$ и A-нормой.

Если A допускает замыкание, то оператор $\bar{A}$, определяемый равенством $\mathcal{G}(\bar{A})=\overline{\mathcal{G}(A)}$, называется *замыканием* оператора A. Если оператор A ограничен, то $\bar{A}$ совпадает с расширением A по непрерывности.

1.2. Сопряженный оператор. Пусть оператор A *плотно определен*, т. е. $\overline{D(A)}=\mathfrak{H}$. Тогда следующим образом строится *сопряженный оператор* A^*. Его область определения есть

$$D(A^*)\overset{\text{def}}{=}\{y\in\mathfrak{H}: \exists h\in\mathfrak{H},\ (Ax, y)=(x, h)\ \forall x\in D(A)\}.$$

Элемент h определяется по y однозначно, и полагают $h=A^*y$. Таким образом,

$$(Ax, y)=(x, A^*y) \quad \forall x \in D(A), \quad \forall y \in D(A^*).$$

В отличие от случая операторов $A \in B(\mathfrak{H})$, это равенство служит не только для описания «действия» оператора A^*, но и, как мы видим, для описания его области определения.

Оператор A^* всегда замкнут; $\overline{D(A^*)}=\mathfrak{H}$ в том и только том случае, если A допускает замыкание. При этом условии $(A^*)^*=\bar{A}$. Если $A_0 \subset A$, $\overline{D(A_0)}=\mathfrak{H}$, то $A_0^* \supset A^*$.

1.3. Самосопряженные операторы. Оператор A, для которого $A^*=A$, называется *самосопряженным* (с. с.); оператор A, для которого $\overline{D(A)}=\mathfrak{H}$ и

$$(Ax, y)=(x, Ay) \quad \forall x, y \in D(A),$$

называется *симметричным.* Для операторов $A \in B(\mathfrak{H})$ оба понятия эквивалентны. Если $A^*=\bar{A}$, то оператор A называется *существенно самосопряженным* (сущ. с. с.). Если A симметричен и $\bar{A} \neq A^*$, то оператор A^* заведомо не симметричен.

Самосопряженность оператора часто устанавливают средствами теории возмущений, т. е. исходя из его близости к другому оператору, самосопряженность которого известна заранее. Типичным результатом в этом направлении является

Теорема 1.1. (Като—Реллих; см. [268], [312, т. 2]). Пусть A — с. с., B — симметричный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем $D(B) \supset D(A)$ и при некоторых $0<a<1$, $b \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|Bx\| \leqslant a\|Ax\|+b\|x\| \quad \forall x \in D(A). \tag{1.2}$$

Тогда оператор $A+B$ с. с. на области определения $D(A)$ и сущ. с. с. на любой области сущ. с.-сти оператора A.

1.4. Спектр оператора. Пусть A — замкнутый оператор. Его *резольвентное множество* $\rho(A)$ по определению состоит из точек $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых существует оператор $(A-\lambda I)^{-1} \in B(\mathfrak{H})$ (I — единичный оператор в $\mathfrak{H}$). Дополнение резольвентного множества $\sigma(A)=\mathbf{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Множество $\rho(A)$ открыто, $\sigma(A)$ — замкнуто. Не исключается ни одна из возможностей $\sigma(A)=\mathbf{C}$, $\sigma(A)=\varnothing$ (для операторов $A \in B(\mathfrak{H})$ ни того, ни другого не бывает).

Если $A=A^*$, то спектр A не пуст и расположен на вещественной оси. Спектр $\sigma(A)$ с. с. оператора представляется в виде объединения *точечного спектра* $\sigma_p(A)$ (т. е. множества всех собственных значений) и *непрерывного спектра*

$$\sigma_c(A)=\{\lambda \in \mathbf{R} : \operatorname{Im}(A-\lambda I) \text{ — незамкнутое множество}\}.$$

Множества $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ могут иметь непустое пересечение. Если $\sigma_p(A)=\varnothing$, то A — оператор с *чисто непрерывным спектром.*

Если линейная оболочка собственных подпространств $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$, $\lambda\in\sigma_p(A)$, плотна в $\mathfrak{H}$, то A — оператор с *чисто точечным спектром*; при этом непрерывный спектр совпадает с множеством предельных точек точечного спектра и, вообще говоря, не пуст.

Объединение непрерывного спектра и множества собственных значений бесконечной кратности называется *существенным спектром* с. с. оператора A $(\sigma_{ess}(A))$. Если $\sigma_{ess}(A)=\varnothing$, то A — оператор с *дискретным спектром*. Дискретность спектра равносильна тому, что при каком-либо (а тогда и при всех) $\lambda\in\rho(A)$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ компактен.

1.5. Спектральная мера. Спектральная теорема для самосопряженных операторов. Пусть каждому борелевскому множеству $\delta\subset\mathbf{R}$ сопоставлен некоторый ортопроектор $E(\delta)$ в пространстве $\mathfrak{H}$, причем $E(\mathbf{R})=I$ и выполнено следующее условие счетной аддитивности: если $\{\delta_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, — попарно не пересекающиеся борелевские множества, то $\sum_n E(\delta_n)=E(\bigcup_n \delta_n)$ (ряд в левой части сходится в сильной операторной топологии). Любое такое отображение $E:\delta\mapsto E(\delta)$ называется *спектральной мерой* в $\mathfrak{H}$ (заданной на борелевских подмножествах оси).

Если E — спектральная мера, то для любого элемента $x\in\mathfrak{H}$ $E(\cdot)x$ — векторная мера, а $\mu_x(\cdot)=(E(\cdot)x, x)$ — скалярная борелевская мера, нормированная условием $\mu_x(\mathbf{R})=\|x\|^2$. Для любых x, $y\in\mathfrak{H}$ $\mu_{x,y}(\cdot)=(E(\cdot)x, y)$ — комплекснозначная борелевская мера.

Как и в случае скалярных мер, *носитель спектральной меры* $(\operatorname{supp} E)$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество $F\subset\mathbf{R}$, такое, что $E(F)=I$. Термин «почти всюду по отношению к спектральной мере E» (E-п. в.) имеет стандартный смысл.

Пусть E — спектральная мера и φ — скалярная функция, определенная E-п. в. на $\mathbf{R}$ и измеримая по Борелю. Тогда можно определить интеграл

$$J_\varphi=\int \varphi dE \quad \left(=\int \varphi(s)\,dE(s)\right), \tag{1.3}$$

представляющий собой замкнутый оператор в $\mathfrak{H}$ с плотной областью определения

$$D(J_\varphi)=D_\varphi=\left\{x\in\mathfrak{H}:\int|\varphi|^2d\mu_x<\infty\right\}. \tag{1.4}$$

Интеграл (1.3) можно понимать например, в «слабом смысле»: при $x\in D_\varphi$, $y\in\mathfrak{H}$ $(J_\varphi x, y)=\int\varphi d\mu_{x,y}$. Оператор J_φ с. с. тогда и только тогда, когда E-п. в. функция φ вещественнозначная, и ограничен тогда и только тогда, когда E-п. в. она ограничена.

Центральную роль в спектральном анализе с. с. операторов играет *спектральная теорема*:

Теорема 1.2. Каждому с. с. оператору A отвечает единственная спектральная мера E^A такая, что

$$A=\int s dE^A(s);$$

при этом $\operatorname{supp} E^A=\sigma(A)$.

Из теоремы 1.2 и из (1.4) вытекают соотношения (в них $\mu_x^A(\cdot)=(E^A(\cdot)x, x)$):

$$x=\int dE^A(s)x; \quad \|x\|^2=\int d\mu_x^A(s) \quad \forall x\in\mathfrak{H};$$

$$D(A)=\left\{x\in\mathfrak{H}: \int s^2 d\mu_x^A(s)<\infty\right\}. \qquad (1.5)$$

Равенства (1.5) выражают собой *теорему разложения.*

Операторы $J_\varphi^A=\int\varphi dE^A$ принимаются за функции $\varphi(A)$ с. с. оператора A; это согласуется с непосредственным определением степеней A^n (при $\varphi(s)=s^n$) и резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$, $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$ (при $\varphi(s)=(s-\lambda)^{-1}$).

Пример 1.1. Пусть A — с. с. оператор с чисто точечным спектром и пусть $P(\lambda)$, $\lambda\in\sigma_p(A)$,— ортопроекторы на собственные подпространства $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Тогда спектральная мера E^A определяется соотношением

$$E^A(\delta)=\sum_{\lambda\in\delta}P(\lambda),$$

а теорема разложения (1.5) принимает более простой вид:

$$x=\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)}P(\lambda)x; \quad \|x\|^2=\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)}\|P(\lambda)x\|^2. \qquad (1.5')$$

Функции $\varphi(A)$ в данном случае — это операторы

$$\varphi(A)=\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)}\varphi(\lambda)P(\lambda). \qquad (1.6)$$

Если $\{e_n\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных элементов оператора A, то равенства (1.5′) означают разложимость произвольного элемента $x\in\mathfrak{H}$ в ряд Фурье и равенство Парсеваля:

$$x=\sum_n(x, e_n)e_n; \quad \|x\|^2=\sum_n|(x, e_n)|^2.$$

Пример 1.2. *Операторы умножения.* Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство с положительной мерой μ и $a(x)$ — вещественнозначная измеримая и п. в. конечная функция на $\mathfrak{X}$. В пространстве $L_2=L_2(\mathfrak{X}, \mu)$ рассмотрим оператор $Q_a: u(x)\mapsto a(x)u(x)$ с естественной областью определения $D(Q_a)=\{u\in L_2: au\in L_2\}$. Оператор Q_a самосопряжен. Если $a=\chi_e$ (=характеристическая функция измеримого подмножества $e\subset\mathfrak{X}$), то Q_a — ортопроектор на подпространство функций, равных нулю п. в. вне e. Спектральная мера любого оператора Q_a определяется соотношением

$$E^Q(\delta)=Q_{\chi_{e(\delta)}}, \quad Q=Q_a, \quad e(\delta)=a^{-1}(\delta),$$

($\delta\subset\mathbb{R}$ — борелевское множество, $a^{-1}(\delta)$ — его прообраз в $\mathfrak{X}$). Точка $\lambda\in\mathbb{R}$ является собственным значением оператора Q_a тогда и только тогда, когда

$$\mu\{x\in\mathfrak{X} : a(x)=\lambda\}>0;$$

$\lambda\in\sigma_c(Q_a)$ тогда и только тогда, когда

$$\mu\{x\in\mathfrak{X} : 0<|a(x)-\lambda|<\varepsilon\}>0 \quad \forall\varepsilon>0.$$

Функции $\varphi(Q_a)$ — это операторы $Q_{\varphi\circ a}$.

1.6. Точечная, абсолютно непрерывная и сингулярная непрерывная компоненты с. с. оператора. Пусть A — с. с. оператор в $\mathfrak{H}$, E^A — его спектральная мера. В $\mathfrak{H}$ выделяются следующие подпространства: $\mathfrak{H}_p$ — замыкание линейной оболочки всех собственных подпространств оператора A; $\mathfrak{H}_{ac}$ — множество всех тех $x\in\mathfrak{H}$, для которых мера $\mu_x{}^A(\cdot)=(E^A(\cdot)x,x)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега; $\mathfrak{H}_{sc}$ — ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ суммы $\mathfrak{H}_p+\mathfrak{H}_{ac}$. При $x\in\mathfrak{H}_{sc}$ мера $\mu_x{}^A$ сингулярна относительно меры Лебега и непрерывна.

Подпространства $\mathfrak{H}_p$, $\mathfrak{H}_{ac}$, $\mathfrak{H}_{sc}$ попарно ортогональны и инвариантны относительно оператора A. Части A_p, A_{ac}, A_{sc} оператора A в этих подпространствах (так, $A_{ac}=A\restriction D(A)\cap\mathfrak{H}_{ac}$) самосопряжены как операторы в $\mathfrak{H}_p$, $\mathfrak{H}_{ac}$, $\mathfrak{H}_{sc}$ соответственно; они называются *точечной*, *абсолютно непрерывной* и *сингулярной непрерывной компонентами оператора* A; говорят также об *абсолютно непрерывной компоненте спектра* и т. п. Если $A=A_{ac}$, то говорят, что *спектр A абсолютно непрерывен.*

1.7. Другие формулировки спектральной теоремы. Смысл теоремы 1.2 состоит в том, что при подходящем преобразовании пространства $\mathfrak{H}$ любой с. с. оператор превращается в оператор умножения. Имеются такие формулировки спектральной теоремы, которые явно это выражают.

Пусть $\mathfrak{H}_k$, $k=1,2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\ \cdot)_k$ и пусть оператор $V:\mathfrak{H}_1\to\mathfrak{H}_2$ *унитарно* отображает $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, т. е. $\operatorname{Im}V=\mathfrak{H}_2$ и $(Vx,\ Vy)_2=(x,y)_1$ $\forall x,y\in\mathfrak{H}_1$. Пусть теперь A_k — оператор в пространстве $\mathfrak{H}_k$. Говорят, что A_1 *унитарно эквивалентен* оператору A_2, если существует такое уиитарное отображение $V:\mathfrak{H}_1\to\mathfrak{H}_2$, что

$$VD(A_1)=D(A_2);\quad A_2Vx=VA_1x\ \ \forall x\in D(A_1).$$

Коротко эти соотношения записывают в виде $A_2=VA_1V^{-1}$. Любые инварианты оператора относительно отношения унитарной эквивалентности называются его *унитарными инвариантами.*

Теорема 1.3. Для любого с. с. оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существуют такая борелевская мера μ, сосредоточенная на спектре $\sigma(A)$, и такая (конечная или счетная) вложенная последовательность множеств

$$\{\mathfrak{X}_k\}_{k\in\mathscr{K}},\quad \mathscr{K}=\overline{1,n}\quad \text{либо}\quad \mathscr{K}=\mathbb{N},\quad \mathfrak{X}_1=\sigma(A),$$

что оператор A унитарно эквивалентен ортогональной сумме операторов умножения на s в пространствах $L_2(\mathfrak{X}, \mu)$.

Поясним содержание теоремы. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ гильбертово пространство вектор-функций $f=\{f_k\}_{k\in\mathscr{K}}$, таких, что f_k $\forall k\in\mathscr{K}$, — измеримая скалярная функция на $\sigma(A)$, равная нулю п. в. вне $\mathfrak{X}_k$, с нормой

$$\|f\|_1^2=\sum_{k\in\mathscr{K}}\int_{\sigma(A)}|f_k|^2 d\mu(<\infty).$$

Оператор умножения $A_1: f(s)\mapsto sf(s)$ с естественной областью определения $D(A_1)=\{f\in\mathfrak{H}_1 : sf(s)\in\mathfrak{H}_1\}$ самосопряжен в $\mathfrak{H}_1$. Утверждение теоремы состоит в том, что операторы A, A_1 унитарно эквивалентны.

Новая формулировка спектральной теоремы позволяет, в частности, указать полную систему унитарных инвариантов с. с. оператора A. Первый из них — это *тип меры* μ, т. е. класс эквивалентности по следующему отношению: борелевские меры μ_1, μ_2 эквивалентны в том и только том случае, если набор множеств меры нуль у них общий, т. е. $\mu_1(e)=0\Leftrightarrow\mu_2(e)=0$. Второй (и последний) инвариант этой системы — *функция кратности*[1] n_A, определяемая следующим образом: $n_A(s)=0$ вне $\sigma(A)$; $n_A(s)=j$ при $s\in\mathfrak{X}_j\setminus\mathfrak{X}_{j+1}$, $j=1, 2, \ldots$. Если $\mathscr{K}=\overline{1, n}$, то $n_A(s)=$ $=n$ на $\mathfrak{X}_n$, если же $\mathscr{K}=\mathbf{N}$, то $n_A(s)=\infty$ на $\bigcap_j\mathfrak{X}_j$. Полнота этой системы инвариантов означает, что если для двух с. с. операторов A_1, A_2 соответствующие им, в силу теоремы 1.3, меры μ_1, μ_2 имеют одинаковый тип, а $n_{A_1}(s)=n_{A_2}(s)$ п. в. по любой из этих мер, то A_1, A_2 унитарно эквивалентны.

Если последовательность $\{\mathfrak{X}_k\}$ сводится к единственному множеству $\mathfrak{X}_1=\sigma(A)$, то A — *с. с. оператор с простым спектром.*

Наконец, иногда бывает удобна следующая формулировка спектральной теоремы.

Теорема 1.4. Для любого с. с. оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве существуют такое пространство с мерой $(\mathfrak{X}, \mu)$ и такая вещественнозначная измеримая функция a на $\mathfrak{X}$, что A унитарно эквивалентен оператору Q_a умножения на $a(x)$ в пространстве $L_2(\mathfrak{X}, \mu)$.

Недостаток этого варианта спектральной теоремы — в том, что пространство $(\mathfrak{X}, \mu)$ и функция a не являются инвариантными объектами. Это, однако, часто искупается тем, что спектральные характеристики оператора Q_a (а вместе с ним — и оператора A) просто вычисляются — см. пример 1.2.

1.8. Полуограниченные операторы и формы. Одним из основных методов изучения с. с. операторов является «метод

[1] Точнее, ее класс эквивалентности по мере μ.

форм», применимый в полуограниченном случае. Симметричный оператор A называется *полуограниченным (снизу)*, если

$$\gamma_A \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x\in D(A),\ \|x\|=1} (Ax, x) > -\infty.$$

Если $\gamma_A \geqslant 0$, то оператор A называется *неотрицательным* ($A\geqslant 0$), если $A\geqslant 0$ и $\operatorname{Ker} A=\{0\}$, то *положительным* ($A>0$), если $\gamma_A>0$, то *положительно определенным*.

Если оператор $A\geqslant 0$ с. с. (а не только симметричен), то его спектр лежит на полуоси $s\geqslant 0$, а потому значения функции $\sqrt{s}$ вещественны E^A-п. в. Следовательно, определен с. с. оператор

$$A^{1/2}=\int s^{1/2}dE^A(s).$$

При $x\in D(A)$ имеем $(Ax, x)=\| A^{1/2}x\|^2$.

Пусть далее $d\subset\mathfrak{H}$ — плотное линейное подмножество и пусть на $d\times d$ определена комплекснозначная функция a, линейная по первому аргументу и эрмитова: $a[x, y]=\overline{a[y, x]}$ $\forall x, y\in d$; отсюда вытекает антилинейность по второму аргументу, а также вещественность *квадратичной формы* $a[x]=a[x, x]$, $x\in d[a]\stackrel{\text{def}}{=}d$. Сама функция $a[x, y]$ называется *эрмитовой полуторалинейной формой*; она однозначно восстанавливается по квадратичной форме $a[x]$.

Форма a называется *полуограниченной (снизу)*, если

$$\gamma_a \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x\in d[a],\ \|x\|=1} a[x] > -\infty.$$

Говорят также о *неотрицательных* ($\gamma_a\geqslant 0$), *положительных* ($\gamma_a\geqslant 0$; $a[x]>0$ при $x\neq 0$) и *положительно определенных* ($\gamma_a>0$) формах.

Всякая положительная форма определяет в $d[a]$ норму, называемую *a-нормой*: $\|x\|_a^2=a[x]$. Если форма положительно определена и множество $d[a]$ полно по a-норме, то форма называется *замкнутой* (на $d[a]$). Положительно определенная форма *допускает замыкание*, если топологии на $d[a]$, порождаемые нормой пространства $\mathfrak{H}$ и a-нормой, согласованы: если $\{x_n\}$ — последовательность элементов из $d[a]$, фундаментальная по a-норме, и $x_n\to 0$ в $\mathfrak{H}$, то обязательно $a[x_n]\to 0$.

В основе метода форм лежит *теорема Фридрихса*, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между замкнутыми положительно определенными формами и с. с. положительно определенными операторами.

Теорема 1.5. 1) Каждому с. с. положительно определенному оператору A отвечает единственная замкнутая положительно определенная форма a такая, что

$$D(A)\subset d[a];\quad (Ax, y)=a[x, y]\quad \forall x\in D(A),\quad \forall y\in d[a]. \qquad (1.7)$$

2) Обратно, каждой замкнутой положительно определенной форме a отвечает единственный с. с. положительно определенный оператор A такой, что выполнено (1.7).

Если оператор A и форма a соответствуют друг другу, то

$$\gamma_A = \gamma_a. \tag{1.8}$$

Поясним, что по оператору A форма a строится так:

$$d[a] = D(A^{1/2}); \quad a[x, y] = (A^{1/2}x, A^{1/2}y).$$

С другой стороны, по форме a сначала определяется ограниченный в $\mathfrak{H}$ с. с. оператор T: именно, для $x \in \mathfrak{H}$ за $h = Tx$ принимается элемент из $d[a]$, для которого $(x, y) = a[h, y]$ $\forall y \in d[a]$; существование и единственность такого элемента h вытекает из теоремы Рисса об общей форме линейного функционала в гильбертовом пространстве. Искомый оператор A есть $A = T^{-1}$.

Пусть теперь a — произвольная полуограниченная (снизу) форма; она называется *замкнутой (допускающей замыкание)*, если при каком-либо (а тогда и при любом) $c > -\gamma_a$ соответствующим свойством обладает положительно определенная форма $a_c[x] = c\|x\|^2 + a[x]$. Если A_c — оператор, отвечающий форме a_c, то с. с. оператор $A = A_c - cI$ полуограничен и не зависит от выбора c; этот оператор A и ставится в соответствие форме a. Для него по-прежнему выполнены соотношения (1.7), (1.8).

Если с. с. оператор A и замкнутая квадратичная форма a соответствуют друг другу, то условимся писать

$$a = QF(A); \quad A = Op(a).$$

Последнее обозначение в другом смысле используется в теории псевдодифференциальных операторов; опасность смешения у нас не возникнет.

На множестве полуограниченных замкнутых форм вводится частичное упорядочение: по определению, $a \leqslant b$, если $d[a] \supset d[b]$ и $a[x] \leqslant b[x]$ при всех $x \in d[b]$. Если при этом $a[x] = b[x]$ лишь для $x = 0$, то $a < b$. Введенное упорядочение естественным образом переносится на полуограниченные с. с. операторы: $A \leqslant (<) B$ означает, что $QF(A) \leqslant (<) QF(B)$.

1.9. Расширение по Фридрихсу. Пусть A_0 — симметричный оператор в $\mathfrak{H}$. В теории расширений (см. [8], [27], [268]) выясняется вопрос об условиях, при которых A_0 имеет с. с. расширения, а также дается абстрактное описание всех таких расширений. Если A_0 полуограничен, то с. с. расширения заведомо существуют, и из них выделяется одно, играющее особую роль. Именно, если A_0 — положительно определенный симметричный оператор, то форма $a_0[x] = (A_0x, x)$, $d[a_0] = D(A)$, допускает замыкание. Пополняя $D(A_0)$ по a_0-норме и продолжая по непрерывности форму a_0, получим множество $d \subset \mathfrak{H}$ и заданную на нем замкнутую положительно определенную форму a. Оператор $A = Op(a)$ является расширением оператора A_0; оно называется *расширением по Фридрихсу*. Если оператор A_0 лишь полуограничен, то описанная процедура применяется к оператору A_0+cI, $c>-\gamma_A$.

1.10. Вариационные тройки. В ряде случаев, в частности,— при исследовании спектральных задач вида

$$Bu=\lambda Au, \tag{1.9}$$

полезен вариант метода форм, основанный на понятии вариационной тройки. *Вариационная тройка* $\{d;\ a,\ b\}$ состоит из гильбертова пространства d с метрической формой $a[x]$ и из ограниченной в d полуторалинейной эрмитовой формы $b[x,\ y]$ (достаточно задать соответствующую квадратичную форму $b[x]$), Соотношение

$$b[x, y]=a[Tx, y] \qquad \forall x,\ y\in d, \tag{1.10}$$

однозначно сопоставляет вариационной тройке $\{d;\ a,\ b\}$ оператор $T=T(d;\ a,\ b)$; этот оператор ограничен и с.с. в d.

Пусть, в частности, формы a, b реализованы как квадратичные формы операторов A, B, действующих в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Точнее, пусть A — положительно определенный с. с. оператор, $a=QF(A)$. Предположим, что оператор B определен и симметричен на некотором плотном множестве $\mathscr{V}\subset d[a]$ (в простейшем случае $\mathscr{V}=D(A)$) и квадратичная форма $(Bx,\ x)$ ограничена в $d[a]$. Продолжая ее по непрерывности, получаем ограниченную форму $b[x]$ на $d[a]$. Тем самым построена вариационная тройка $\{d[a];\ a,\ b\}$. Определяемый ею оператор совпадает на $\mathscr{V}$ с оператором $A^{-1}B: d[a]\mapsto d[a]$; следователь- его спектр естественно связать с уравнением (1.9).

При $b[x]=\|x\|^2$ имеем $T=A^{-1}\restriction d[a]$. Поскольку $A^{1/2}$ унитарно отображает $d=D(A^{1/2})$ на $\mathfrak{H}$, оператор T унитарно эквивалентен оператору $A^{-1}=A^{1/2}TA^{-1/2}$ в пространстве $\mathfrak{H}$; стало быть, все их спектральные характеристики совпадают. Переход от неограниченного оператора A к ограниченному T часто удобен в применениях.

Отметим, что в общем случае построение вариационной тройки не требует привлечения «объемлющего» гильбертова пространства.

При исследовании спектра операторов, определяемых вариационными тройками, часто пользуются сокращенной терминологией: говорят о «спектре вариационной тройки» и т. п.

1.11. Функция распределения спектра. Спектральная функция. Важной характеристикой расположения спектра с. с. оператора A служит его *функция распределения*

$$N(\Sigma;\ A)=\dim E^A(\Sigma)\mathfrak{H} \tag{1.11}$$

($\Sigma\subset\mathbf{R}$ — произвольный промежуток). Наиболее интересен случай, когда $N(\Sigma;\ A)<\infty$. Тогда спектр оператора A на промежутке Σ сводится к конечному числу конечнократных собственных значений, и величина (1.11) равна их суммарной кратности. Если $N(\Sigma;\ A)=\infty$ и Σ — ограниченный промежуток, то его замыкание содержит хотя бы одну точку из $\sigma_{ess}(A)$. Если $\Sigma\cap\sigma_{ess}(A)=\varnothing$, то говорят, что спектр A на Σ *дискретен*.

Для полуограниченных снизу с. с. операторов положим

$$N(\lambda;\ A)=N((-\infty,\ \lambda);\ A)\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}. \tag{1.12}$$

Для исследования спектра существенно, что величина (1.12) допускает явное выражение в терминах квадратичной формы $a=QF(A)$. Одним из наиболее употребительных вариантов такого выражения служит равенство (*лемма Глазмана* [49]):

$$N(\lambda;A)=\max\{\dim F : F\subset d[a],\ a[x]<\lambda\|x\|^2,\ 0\neq x\in F\}. \tag{1.13}$$

В (1.13) включение $F\subset d[a]$ можно заменить включением $F\subset\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}\subset d[a]$ — какое-либо линейное подмножество, плотное в $d[a]$ по a-норме (при $\gamma_a\leqslant 0$ — по норме формы $c\|x\|^2+a[x]$, $c>-\gamma_a$).

О формуле (1.13), а также о других аналогичных формулах, говорят, что они дают *вариационное описание спектра*. Из (1.13) вытекает следующий важный результат.

Теорема 1.6. Пусть A, B — с. с. полуограниченные операторы и $A\leqslant B$. Тогда при любом $\lambda\in\mathbf{R}$

$$N(\lambda;\ A)\geqslant N(\lambda;\ B).$$

Предположим теперь, что A — полуограниченный с. с. оператор в некотором пространстве $L_2(\mathfrak{X},\ \mu)$. В интересных для приложений случаях часто оказывается что *спектральный проектор* $E_\lambda^A=E^A(-\infty,\ \lambda)$ представляет собой интегральный оператор. Его ядро $e^A(\lambda;\ x,\ y)$ называется *спектральной функцией оператора* A. Пусть, например, спектр A дискретен, и $\{\lambda_j\}_1^\infty$, $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — последовательность его собственных значений и полная ортонормированная последовательность соответствующих собственных функций. Тогда

$$e^A(\lambda;\ x,\ y)=\sum_{\lambda_j<\lambda}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)} \tag{1.14}$$

— вырожденное ядро (ранга $N(\lambda;\ A)$). Для операторов на вектор-функциях размерности k

$$e^A(\lambda;\ x,\ y)=\sum_{\lambda_j<\lambda}\langle\,\cdot\,,\ \varphi_j(y)\,\rangle\,\varphi_j(x), \tag{1.15}$$

где $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{C}^k$.

В случае недискретного спектра спектральную функцию обычно можно выразить через *обобщенные собственные функции* оператора A, т. е. через не принадлежащие L_2 решения уравнения $Au=\lambda u$; подробнее об этом см. [15], [16], [222], [283].

В отличие от функции $N(\lambda;\ A)$, спектральная функция не является унитарно инвариантным объектом, поскольку требует реализации гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в виде некоторого пространства L_2.

Для неполуограниченных с. с. операторов обычно рассматриваются две *функции распределения*

$$N_\pm(\lambda;\ A) = N((0,\ \lambda);\ \pm A), \quad \lambda > 0, \tag{1.16}$$

и соответствующие спектральные функции $e_\pm^A(\lambda;\ x,\ y)$ — ядра интегральных операторов, представляющих проекторы $E^{\pm A}(0, \lambda)$.

1.12. Компактные операторы. Здесь приводятся краткие сведения о компактных (вполне непрерывных) операторах в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Каждому такому оператору T сопоставляется последовательность его *s-чисел* $s_n(T) = (\lambda_n(T^*T))^{1/2}$. Здесь $\lambda_n(T^*T)$ — собственные значения с. с. оператора $T^*T \geqslant 0$, расположенные в порядке убывания, с учетом кратности. Если $\sum\limits_n s_n(T) < \infty$, то оператор T называется *ядерным*; для ядерных операторов абсолютно сходится ряд

$$\operatorname{Tr} T = \sum_n \lambda_n(T),$$

в котором собственные значения оператора нумеруются с учетом их алгебраической кратности.

Пусть, в частности, $\mathfrak{H} = L_2(X)$, где $X \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область, и T — *интегральный оператор*:

$$(Tu)(x) = \int_X T(x,\ y)\, u(y)\, dy.$$

Если оператор T — ядерный и ядро $T(x,\ y)$ непрерывно в $\bar{X} \times \bar{X}$ то справедливо равенство

$$\operatorname{Tr} T = \int_X T(x,\ x)\, dx. \tag{1.17}$$

Если речь идет об интегральных операторах в пространстве вектор-функций на X, то ядро $T(x,\ y)$ матричнозначное, и при прежних условиях

$$\operatorname{Tr} T = \int_X \operatorname{tr} T(x,\ x)\, dx, \tag{1.18}$$

где tr — обозначение для следа матрицы.

Скорость убывания s-чисел принято выражать в терминах функции распределения

$$n(s;\ T) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} : s_n(T) > s\} = N((s^2, \infty);\ T^*T),\ s > 0. \tag{1.19}$$

Для компактных с. с. операторов полагают

$$n_\pm(\lambda;\ T) = N((\lambda,\ \infty);\ \pm T), \quad \lambda > 0. \tag{1.20}$$

Для этих величин справедлив аналог равенства (1.13):

$$n_\pm(\lambda;\ T) = \max\{\dim F : F \subset \mathfrak{H};\ \pm(Tx,\ x) > \lambda \|x\|^2,\ 0 \neq x \in F\}. \tag{1.21}$$

Если $A>0$ — с. с. оператор с дискретным спектром, то, очевидно,

$$N(\lambda;\ A)=n_+(\lambda^{-1};\ A^{-1}).$$

§ 2. Задание дифференциальных операторов. Существенная самосопряженность

Задать *дифференциальный оператор* (д. о.) — означает, в соответствии со сказанным в § 1, указать его область определения и «правило действия». Обычно нас будут интересовать «самосопряженные (с. с.) реализации д. о.» — иначе говоря, д. о., рассматрнваемые на такой области определения, на которой они самосопряжены. Проверка того, что д. о. самосопряжен, не всегда проста. В ряде случаев область определения с. с. д. о. удается описать лишь косвенным путем; действие оператора на этой области также не всегда задается явным образом. Особенно отчетливо это проявляется в «методе квадратичных форм», которому посвящен § 3.

2.1. Дифференциальные выражения и их символы. Пусть $X\subseteq\mathbf{R}^n$ — некоторая область; ниже за основное гильбертово пространство принимается пространство $L_2(X)$. Пусть в X задано *дифференциальное выражение* (д. в.) порядка $m\geqslant 1$

$$(\mathscr{L}u)(x)=\mathscr{L}(x,D)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u(x). \tag{2.1}$$

Чтобы не создавать излишних осложнений, предположим сначала, что

$$a_\alpha\in C^\infty(X)\quad(\alpha\neq 0);\quad a_0\in L_{2,\,\mathrm{loc}}(X). \tag{2.2}$$

При этих условиях д. в. (2.1) заведомо определено (в смысле теории обобщенных функций) для всех $u\in L_2(X)$. Определено также *формально сопряженное выражение*

$$(\mathscr{L}^+u)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha[\overline{a_\alpha(x)}u(x)]. \tag{2.3}$$

Очевидно, при $u,\ v\in C_0^\infty(X)$ справедливо равенство

$$(\mathscr{L}u,\ v)=(u,\ \mathscr{L}^+v). \tag{2.4}$$

Если $\mathscr{L}^+=\mathscr{L}$, то д. в. $\mathscr{L}$ называется *формально самосопряженным* (ф. с. с.). Условие $\mathscr{L}^+=\mathscr{L}$ означает, что оператор $\mathscr{L}\restriction C_0^\infty(X)$ симметричен; оно необходимо для того, чтобы у $\mathscr{L}$ существовали с. с. реализации.

Полиномы (по $\xi\in\mathbf{R}^n$)

$$\mathscr{L}(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha; \tag{2.5}$$

$$\mathscr{L}^0(x,\xi)=\mathscr{L}_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \tag{2.6}$$

называются соответственно *символом* (или *полным символом*) и *главным символом* д. в. (2.1). Главный символ д. в. $\mathscr{L}^+$ есть, очевидно, $(\mathscr{L}^+)^0(x, \xi)=\overline{\mathscr{L}^0(x, \xi)}$. Поэтому, если $\mathscr{L}$ — ф. с. с., то его главный символ — вещественный.

Пусть теперь X — гладкое n-мерное многообразие (с краем или без края). Д. в. $\mathscr{L}$ на X (точнее, на $\operatorname{Int} X$) задается формулой вида (2.1) в любой локальной системе координат на X. Главный символ $\mathscr{L}^0(x, \xi)$ при замене координат преобразуется как функция на кокасательном расслоении T^*X (см. [65]).

Если на X фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu$ [346, т. 2], то можно определить пространство $L_2(X; d\mu)$ и соответствующее сопряжение $\mathscr{L}\mapsto\mathscr{L}^+$. (Формула (2.3) задает такое сопряжение в случае, когда $X\subset\mathbf{R}^n$ и $d\mu=dx$ — n-мерная лебегова плотность). Равенство (2.4) по-прежнему выполнено. Наиболее важен случай, когда X — риманово; тогда за $d\mu$ стандартно принимают «элемент риманова объема» и пишут $L_2(X)$ вместо $L_2(X; d\mu)$.

Можно рассматривать также операторы вида (2.1), действующие в пространствах вектор-функций размерности k, заданных в области $X\subset\mathbf{R}^n$. Коэффициентами $a_\alpha(x)$ служат $(k\times k)$-матрицы. В формуле (2.3) $\overline{a_\alpha(x)}$ следует заменить на сопряженную матрицу $a^*_\alpha(x)$. Символ и главный символ д. в. по-прежнему определяются формулами (2.5), (2.6); если $\mathscr{L}$ — ф. с. с., то значения главного символа $\mathscr{L}^0(x, \xi)$ — эрмитовы матрицы.

Еще более общую ситуацию получаем, рассматривая д. в. на сечениях эрмитова векторного расслоения $\mathscr{E}$ над многообразием X. При любой локальной тривиализации коэффициенты $a_\alpha(x)$ — гомоморфизмы слоев $\mathscr{E}_x$. Главный символ определяется инвариантно; он представляет собой гомоморфизм расслоения $\tilde{\mathscr{E}}$ над $TT'=T^*X\setminus\{0\}$, индуцированного из $\mathscr{E}$ естественной проекцией $\pi: TT'\to X$.

2.2. Эллиптические дифференциальные выражения. Скалярное д. в. $\mathscr{L}$ порядка m называется *эллиптическим в области* $X\subset\mathbf{R}^n$, если его главный символ удовлетворяет в $X\times\mathbf{R}^n$ неравенству

$$|\mathscr{L}^0(x, \xi)|\geqslant\gamma(x)|\xi|^m,\quad \gamma(x)>0,$$

и *равномерно эллиптическим*, если

$$|\mathscr{L}^0(x, \xi)|\geqslant\gamma|\xi|^m,\quad \gamma>0. \tag{2.7}$$

Часто говорят также, что $\mathscr{L}(x, \xi)$ — *эллиптический символ*. Число $\gamma_{\mathscr{L}}$ — наибольшее допустимое значение γ в (2.7) — называют *константой эллиптичности* д. в. $\mathscr{L}$. Ясно, что скалярное эллиптическое ф. с. с. д. в. должно иметь четный порядок.

Для операторов на вектор-функциях (иначе говоря — для систем уравнений) эллиптичность по определению заключается в том, что $\det \mathscr{L}^0(x, \xi)$ — скалярный эллиптический символ. Свойство эллиптичности сохраняется при гладких заменах переменных; это позволяет распространить понятие эллиптичности на случай операторов на многообразиях (в том числе — на операторы в векторных расслоениях).

Пример 2.1. *Формально с. с. эллиптические операторы второго порядка.* Пусть в области $X\subset\mathbf{R}^n$

$$(\mathscr{L}u)(x)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} D_{x_i}(a_{ij}(x)D_{x_j}u(x))+a_0(x)u(x), \qquad (2.8)$$

причем $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$, $\operatorname{Im} a_0=0$, и в $X\times\mathbf{R}^n$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\gamma|\xi|^2, \quad \gamma>0. \qquad (2.9)$$

По сравнению с общим условием равномерной эллиптичности (2.7), условие (2.9) фиксирует выбор знака $\mathscr{L}^0$.

Ведущий частный случай — *оператор Лапласа* $\mathscr{L}=-\Delta=$ $=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} D^2_{x_i}$; для него $\mathscr{L}(\xi)=\mathscr{L}^0(\xi)=|\xi|^2$.

Пример 2.2. *Оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии* X. Пусть $\{g_{ij}\}$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, — матрица метрического тензора в локальных координатах, $\{g^{ij}\}$ — обратная матрица и $g=\det\{g_{ij}\}$. По определению, в этих координатах

$$-\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i D_{x_i}\left(\sum_j g^{ij}\sqrt{g}\,D_{x_j}\right). \qquad (2.10)$$

Если $X\subset\mathbf{R}^n$ — область со стандартной эвклидовой метрикой, то (2.10) сводится к обычному оператору Лапласа.

Важный пример эллиптического оператора в расслоениях — это оператор Лапласа — Бельтрами — Δ_p на p-формах над X [346].

Пример 2.3. *Полигармонический оператор* $\mathscr{L}=(-\Delta)^r$; для него $\operatorname{ord}\mathscr{L}=2r$ и $\mathscr{L}(\xi)=\mathscr{L}^0(\xi)=|\xi|^{2r}$.

2.3. Максимальный и минимальный операторы. Как уже упоминалось, при условиях (2.2) д. в. $\mathscr{L}$ определено, в смысле теории обобщенных функций, для любых $u\in L_2(X)$. Чтобы говорить об $\mathscr{L}$ как об операторе в $L_2=L_2(X)$, необходимо фиксировать его область определения — линейное множество $D\subset L_2$, такое, что $\mathscr{L}D\subset L_2$. Оператор $A=\mathscr{L}\restriction D$ часто называют *реализацией* д. в. $\mathscr{L}$. По определению, за символ (главный символ) д. о. $A=\mathscr{L}\restriction D$ принимается символ (главный символ) д. в. $\mathscr{L}$: $A(x, \xi)=\mathscr{L}(x, \xi)$; $A^0(x, \xi)=\mathscr{L}^0(x, \xi)$.

Самую широкую возможную область определения имеет *максимальный оператор* $\mathscr{L}_{\max}=\mathscr{L}\upharpoonright D_{\max}$, где

$$D_{\max}=D_{\max}(\mathscr{L})=\{u\in L_2:\mathscr{L}u\in L_2\}.$$

С другой стороны, как правило, рассматриваются лишь области определения $D\supset C_0^\infty(X)$. Замыкание оператора $\mathscr{L}\upharpoonright C_0^\infty(X)$ называется ***минимальным оператором***, порожденным д. в. $\mathscr{L}$. Его областью определения служит множество $D_{\min}=D_{\min}(\mathscr{L})$ — пополнение класса $C_0^\infty(X)$ по $\mathscr{L}$-норме вида (1.1).

Пример 2.4. Пусть X — область в $\mathbf{R}^n$ и $\mathscr{L}$ — эллиптическое д. в. порядка m с постоянными коэффициентами. Тогда $D_{\min}(\mathscr{L})=\overset{0}{H}{}^m(X)$, что легко доказывается с помощью преобразования Фурье.

Результат примера 2.4 распространяется и на равномерно эллиптические д. в. с переменными коэффициентами (в случае их достаточной регулярности).

В общем (не эллиптическом) случае для функций $u\in D_{\min}(\mathscr{L})$ также могут сохраняться некоторые граничные условия на ∂X. С другой стороны, функции $u\in D_{\max}$, вообще говоря, не удовлетворяют каким-либо граничным условиям. Однако, если область X не ограничена, либо коэффициенты д. в. $\mathscr{L}$ быстро растут вблизи ∂X, то включение $\mathscr{L}u\in L_2(X)$ может в неявной форме содержать в себе некоторые условия на бесконечности или на ∂X, которым должны удовлетворять функции из $D_{\max}$.

Пример 2.5. Пусть $X=\mathbf{R}^1$, $\mathscr{L}=D$, $u\in D_{\max}(\mathscr{L})=H^1(\mathbf{R})$; тогда $u(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Если $\mathscr{L}$ — ф. с. с. выражение, то, как непосредственно вытекает из определений, $\mathscr{L}_{\max}=(\mathscr{L}_{\min})^*$. Может оказаться, что

$$\mathscr{L}_{\max}=\mathscr{L}_{\min}, \tag{2.11}$$

или, что то же самое, $D_{\max}(\mathscr{L})=D_{\min}(\mathscr{L})$. Тогда $\mathscr{L}_{\min}$ — с. с. оператор; говорят также, что д. в. $\mathscr{L}$ сущ. с. с. на $C_0^\infty(X)$. Так, в частности, обстоит дело в примере 2.5.

Если $A=\mathscr{L}\upharpoonright D$ — какая-либо с. с. реализация д. в. $\mathscr{L}=\mathscr{L}^+$, то обязательно

$$D_{\min}(\mathscr{L})\subset D\subset D_{\max}(\mathscr{L}). \tag{2.12}$$

Таким образом, сущ. с.-сть на C_0^∞ означает, что $\mathscr{L}$ имеет единственную с. с. реализацию.

С. с. реализации существуют не всегда. Из общей теории расширений (см. [8], [27], [268]) следует, что ф. с. с. выражение $\mathscr{L}$ имеет с. с. реализации тогда и только тогда, когда совпадают *индексы дефекта*

$$n_\pm(\mathscr{L})=\dim\operatorname{Ker}(\mathscr{L}_{\max}\pm iI).$$

Это условие заведомо выполнено в случае, если оператор $\mathscr{L}_{\min}$ полуограничен снизу, так как тогда $n_{\pm}(\mathscr{L})=\dim \operatorname{Ker}(\mathscr{L}_{\max}-cI)$ при $c<\gamma_{\mathscr{L}_{\min}}$.

Все сказанное естественно переносится на перечисленные в п. 2.1 более общие ситуации.

2.4. Существенная самосопряженность эллиптических операторов. Один из наиболее простых случаев, когда д. в. имеет единственную с. с. реализацию — это случай эллиптических операторов на многообразии без края.

Теорема 2.1. Пусть X — гладкое компактное многообразие с фиксированной гладкой положительной плотностью и пусть $\mathscr{L}=\mathscr{L}^{+}$ — эллиптическое д. в. на X. Тогда оператор $\mathscr{L}$ сущ. с. с. на $C^{\infty}(X)$. Справедливо равенство

$$D_{\max}(\mathscr{L})=H^{m}(X),\ m=\operatorname{ord}\mathscr{L}.$$

Результат теоремы распространяется и на случай эллиптических д. в. в расслоениях.

Обсудим теперь, ограничиваясь эллиптическими д. в., случай, когда $\mathscr{L}_{\max}\neq\mathscr{L}_{\min}$. Если D — область определения с. с. реализации $\mathscr{L}\restriction D$, то она удовлетворяет соотношениям (2.12) и замкнута относительно $\mathscr{L}$-нормы (эти условия, конечно, лишь необходимы). Из (2.12) следует, что для функции $u\in D_{\max}$ принадлежность $u\in D$ определяется лишь поведением u в окрестности ∂X (и на бесконечности, если X не ограничена). С этой точки зрения любая с. с. реализация д. в. $\mathscr{L}$ определяется заданием граничных условий.

Проведенные рассмотрения допускают локализацию. Пусть Γ — замкнутое подмножество ∂X и

$$D^{\Gamma}_{\min}=D^{\Gamma}_{\min}(\mathscr{L})=\{u\in D_{\max}(\mathscr{L}): u=0 \text{ в окрестности } \Gamma\}.$$

Если замыкание оператора $\mathscr{L}\restriction D^{\Gamma}_{\min}$ не совпадает с $\mathscr{L}_{\max}$, то говорят, что $\mathscr{L}$ требует граничных условий на Γ. Аналогично, можно говорить о граничном условии на бесконечности и т. п.

Вопрос о граничных условиях на бесконечности впервые был исследован Г. Вейлем (см. [49], [99], [222]) для случая д. в. 2-го порядка на полуоси $\mathbf{R}_{+}$. Г. Вейль рассматривал эту задачу как предел задач по расширяющейся системе промежутков $(0, l)$. Каждому значению l был определенным образом сопоставлен круг $\mathbf{D}_l\subset\mathbf{C}^1$, причем $\mathbf{D}_{l_2}\subset\mathbf{D}_{l_1}$ при $l_2>l_1$. Поэтому при $l\to\infty$ круги $\mathbf{D}_l$ стягиваются либо к «предельной точке», либо к «предельному кругу». В первом случае оператор не требует граничного условия на бесконечности, во втором — требует. В этой связи для операторов 2-го порядка на полуоси часто говорят о случае *предельной точки* (*предельного круга*) на $+\infty$. Это означает, что граничное условие на $+\infty$ не требуется (требуется). Для оператора на оси можно говорить о случаях предельной точки и предельного круга как на $+\infty$, так и на $-\infty$.

Приведем классические примеры с. с. операторов, задаваемых ф. с. с. д. в. и граничными условиями.

Пример 2.6. *Основные граничные задачи для эллиптического д. в. 2-го порядка.* Пусть в ограниченной области $X \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей ∂X задано равномерно эллиптическое ф. с. с. д. в. (2.8) с коэффициентами из $C^\infty(\overline{X})$. Положим

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = \mathcal{L} \restriction D_{\mathrm{I}}, \quad D_{\mathrm{I}} = \{u \in H^2(X): u|_{\partial X} = 0\}; \tag{2.13}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{II}} = \mathcal{L} \restriction D_{\mathrm{II}}, \quad D_{\mathrm{II}} = \{u \in H^2(X): \partial u/\partial \nu|_{\partial X} = 0\}; \tag{2.14}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{III}} = \mathcal{L} \restriction D_{\mathrm{III}}, \quad D_{\mathrm{III}} = \left\{u \in H^2(X): \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)\Big|_{\partial X} = 0\right\}. \tag{2.15}$$

В (2.14), (2.15) $\partial/\partial\nu$ — *оператор дифференцирования по конормали* в точке $x \in \partial X$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_j),$$

где $n = n(x)$ — внешняя нормаль; в (2.15) $\sigma = \sigma(x)$ — гладкая вещественнозначная функция на ∂X. Граничные условия в (2.13)—(2.15) имеют смысл, в силу теорем вложения для класса H^2. Д. о. $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$—$\mathcal{L}_{\mathrm{III}}$ называются соответственно *операторами первой, второй* и *третьей граничных задач.*

Пример 2.7. *Оператор задачи Дирихле для уравнения порядка* $2r$. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ — д. в. четного порядка $m = 2r$, равномерно эллиптическое в $\overline{X}$, причем старшие коэффициенты a_α, $|\alpha| = m$, вещественны. Оператор

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L} \restriction H^{2r}(X) \cap \overset{0}{H}{}^r(X) \tag{2.16}$$

называется *оператором задачи Дирихле для д. в.* $\mathcal{L}$. При $m = 2$ $\mathcal{L}_D$ совпадает с оператором (2.13).

Операторы (2.13)—(2.16) представляют собой наиболее важные частные случаи операторов регулярных эллиптических граничных задач. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей и $\mathcal{L}$ — равномерно эллиптическое д. в. порядка $m = 2r$ с гладкими в $\overline{X}$ коэффициентами, действующее на скалярные функции в X. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r\}$ — набор дифференциальных выражений, заданных в окрестности ∂X и удовлетворяющих следующим условиям.

1⁰. $0 \leqslant m_j = \operatorname{ord} \mathcal{B}_j < m$, $j = 1, \ldots, r$; $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$.

2⁰. Главные символы $\mathcal{B}_j^0(x, \xi)$ таковы, что $\mathcal{B}_j^0(x, n(x)) \neq 0$, $\forall x \in \partial X$.

3⁰. Для любого вектора $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$, касательного к ∂X в точке $x \in \partial X$, полиномы комплексного переменного τ: $B_j^0(x, \xi + \tau n(x))$, $j = 1, \ldots, r$, линейно независимы по модулю полинома $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} (\tau - \tau_i^+(x, \xi))$, где τ_i^+ — корни полинома $\mathcal{L}^0(x, \xi + \tau n(x))$, имеющие положительные мнимые части.

При выполнении этих условий говорят, что $\{\mathscr{L}, \mathscr{B}\}$ — *оператор регулярной эллиптической граничной задачи.*

Теорема 2.2. Пусть $\{\mathscr{L}, \mathscr{B}\}$ — оператор регулярной эллиптической граничной задачи. Тогда, если оператор

$$A = \mathscr{L} \upharpoonright \{u \in H^m(X) : \mathscr{B}_j u|_{\partial X} = 0, \ j = 1, \ldots, r\}$$

симметричен, то он самосопряжен. В частности, самосопряжены операторы (2.13) — (2.16).

Справедливость теоремы следует из теории разрешимости эллиптических граничных задач [254], [280]. Входящее в условие теоремы требование симметричности включает формальную самосопряженность д. в. $\mathscr{L}$, а также предусматривает определенное согласование $\mathscr{L}$ и граничных условий (пример — операторы (2.14), (2.15)).

Для задач в областях с негладкой границей теорема 2.2, вообще говоря, теряет силу. Так, если $X \subset \mathbf{R}^2$ — область, граница которой содержит угловую точку, причем величина внутреннего угла больше π, то оператор $-\Delta_D$ не с. с. (см. по этому поводу пример 3.2).

Регулярные эллиптические граничные задачи определяются также для операторов, действующих в пространствах сечений векторных расслоений. Теорема 2.2 распространяется на этот случай. Мы будем объединять все такие операторы, а также эллиптические д. о. на компактных многообразиях без края, под названием *регулярных эллиптических д. о.*

2.5. Сингулярные дифференциальные операторы. Дифференциальные операторы, не являющиеся регулярными эллиптическими, условимся называть *сингулярными.* Сингулярность может вызываться различными причинами: некомпактностью многообразия; нарушением условия равномерной эллиптичности; нерегулярностью коэффициентов или границы и т. п. Из приведенного перечня видно, что объединение всех этих операторов под одним названием весьма условно. Среди сингулярных д. о. много таких, которые по своим свойствам близки к регулярным эллиптическим.

Область определения с. с. реализаций д. в. $\mathscr{L} = \mathscr{L}^+$ в сингулярном случае редко опускает простое явное описание. Одно из исключений составляет следующий результат, легко доказываемый с помощью перехода к Фурье-образам.

Теорема 2.3. Пусть $X = \mathbf{R}^n$ и $\mathscr{L} = \mathscr{L}^+$ — д. в. с постоянными коэффициентами. Тогда $\mathscr{L}$ сущ. с. с. на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и с. с. на области

$$D(\mathscr{L}) = \left\{u \in L_2(\mathbf{R}^n) : \int (1 + |\mathscr{L}(\xi)|^2) |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty\right\}. \quad (2.17)$$

В частности, если оператор $\mathscr{L}$ эллиптичен, то он самосопряжен на $H^m(\mathbf{R}^n)$, $m = \operatorname{ord} \mathscr{L}$.

2.6. Оператор Шрёдингера. Наиболее важным для приложений примером сингулярного д. о. является *оператор Шрёдингера* в $L_2(\mathbf{R}^n)$:

$$\mathscr{L}u = -\Delta u + Vu. \qquad (2.18)$$

Вещественную (в рамках самосопряженной теории) функцию V обычно называют *потенциалом*. В этом пункте, в соответствии с (2.2), предполагаем, что

$$V \in L_{2,\text{loc}}(\mathbf{R}^n). \qquad (2.19)$$

Сингулярным является также оператор (2.18) в $L_2(X)$, коль скоро область $X \subset \mathbf{R}^n$ не ограничена. Мы затронем лишь случай, когда дополнение $\mathbf{R}^n \setminus X$ компактно, а также — при $n=1$ — случай полуоси $X = \mathbf{R}_+ = (0, \infty)$. На ∂X ставится какое-либо самосопряженное граничное условие (например — $u|_{\partial X} = 0$ либо $\partial u/\partial n|_{\partial X} = 0$).

Уравнение $D_t u = \mathscr{L}u$, где $\mathscr{L}$ — оператор (2.18), описывает эволюцию волновой функции квантовой системы с гамильтонианом $\mathscr{L}(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$. Для того, чтобы эволюционный оператор этого уравнения был унитарным, требуется, чтобы реализация $\mathscr{L}$ была с. с. оператором. Сущ. с. с-сть $\mathscr{L}$ на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ означает, грубо говоря, что волна, первоначально локализованная в пространстве, не может уйти на бесконечность за конечное время. Классическим аналогом сущ. с. с-ти служит *полнота* гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathscr{L}(x, \xi)$, т. е. существование решения системы для всех $t \in \mathbf{R}$ при любых начальных данных (x_0, ξ_0), $\xi_0 \neq 0$. См. в [312, т. 2] обсуждение пределов применимости этой аналогии.

Точное описание области определения, на которой д. о. (2.18) самосопряжен, удается дать лишь в редких случаях. По большей части они исследуются на основании теоремы 1.1. В применении к оператору Шрёдингера обычно полагают $A = -\Delta \restriction H^2(\mathbf{R}^n)$ (это — с. с. оператор, согласно теореме 2.3) и $Bu = Vu$. Оценки вида (1.2) выводятся из теорем вложения. Ниже приведен один из типичных результатов, основанных на теореме 1.1.

Теорема 2.4 (Штуммель; см. [312, т. 2]). Пусть вещественный потенциал V удовлетворяет следующему условию:

а) если $n \geqslant 4$, то при каком-либо α, $0 < \alpha < 4$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \int_{|x-y|<1} |x-y|^{-(n-4+\alpha)} V^2(y)\, dy < \infty;$$

б) если $n \leqslant 3$, то $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \int\limits_{|x-y|<1} V^2(y)\, dy < \infty$.

Тогда оператор (2.18) с. с. на $H^2(\mathbf{R}^n)$ и сущ. с. с. на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Иначе можно сказать, что в условиях теоремы оператор (2.18) не требует граничных условий на бесконечности. В такой формулировке теорема распространяется на случай оператора Шрёдингера в областях $X \neq \mathbf{R}^n$ (при проверке условий теоремы следует считать $V=0$ вне X).

Пример 2.8. *Трехмерный оператор Шрёдингера с кулоновым потенциалом* $V(x) = -c|x|^{-1}$ с. с. на $H^2(\mathbf{R}^3)$.

Пример 2.9. *N-частичный оператор Шрёдингера в пространстве* $L_2(\mathbf{R}^{nN})$:

$$H = -\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (2\mu_j)^{-1} \Delta_j + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} V_j(x_j) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} W_{kl}(x_k - x_l), \quad x_j \in \mathbf{R}^n. \tag{2.20}$$

Здесь μ_j — масса j-той частицы и Δ_j — лапласиан по j-той группе переменных. Оператор (2.20) с. с. на $H^2(\mathbf{R}^{nN})$, если каждый из потенциалов V_j, W_{kl} удовлетворяет условиям теоремы 2.4. В частности, это верно для оператора Шрёдингера атома с кулоновым взаимодействием между частицами.

Условия теоремы 2.4 заведомо не выполнены, если $|V(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Для таких потенциалов область определения с. с. оператора Шрёдингера должна зависеть от V. Естественным множеством, на котором оператор (2.18) определен как оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$, является множество

$$\hat{D} = \{u \in H^2(\mathbf{R}^n) : Vu \in L_2(\mathbf{R}^n)\}.$$

Если оператор (2.18) с. с. на $\hat{D}$ (в этом случае он заведомо сущ. с. с. на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$), то его называют *разделимым*. Разделимость всегда связана с определенной регулярностью поведения потенциала.

Теорема 2.5 ([133]). Пусть $V(x) = \overline{V}(x) \geqslant 1$ и при некотором $c > 0$ выполнено условие

$$V(y) \leqslant cV(x), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < 1. \tag{2.21}$$

Тогда оператор (2.18) разделим.

Условие (2.21), во-первых, означает не слишком быстрый — не выше экспоненциального — рост потенциала при $|x| \to \infty$ и, во-вторых, запрещает быстрые осцилляции и другие неравномерности в поведении $V(x)$. Другое условие:

$$V(x) \geqslant 0, \quad |\nabla V(x)| \leqslant c\,[V(x)]^{3/2}, \quad c < 2,$$

также обеспечивающее разделимость (см. [32]), разрешает бóльший рост $V(x)$ при $|x| \to \infty$. Имеются также условия разделимости, допускающие локальные нерегулярности потенциала. Они формулируются в терминах вспомогательного «усредненного» потенциала типа

$$V^*(x) = \inf \{d : d^{n-2} \geqslant c_n \int_{|y-x|<d} V(y)\,dy\},$$

(точное определение использует термины емкости); по этому поводу см. [119], где есть и дальнейшие ссылки.

В более сложной обстановке не удается точно описать область определения с. с. реализации оператора Шрёдингера. Тогда на первый план выступает исследование условий на V, при которых выполнено (2.11), т. е. не требуется граничное условие на бесконечности. Одним из основных результатов в этой проблематике является

Теорема 2.6 (Като; см. [312, т. 2]). Пусть вещественный потенциал $V \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(X)$ ограничен снизу: $V(x) \geqslant c > -\infty$. Тогда оператор (2.18) не требует граничного условия на бесконечности.

Результат сохраняется и в случае, если потенциал стремится к $-\infty$ при $|x| \to \infty$ не слишком быстро.

Теорема 2.7 (Сирс; см. [16], [312, т. 2]). Пусть вещественный потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию

$$V(x) \geqslant -Q(|x|),$$

где $Q(r)$ — такая неубывающая положительная непрерывная функция на $\mathbf{R}_+$, что

$$\int^{\infty} [Q(r)]^{-1/2} dr = \infty.$$

Тогда оператор (2.18) сущ. с. с. на $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$.

Условие теоремы выполнено, в частности, при $Q(r) = r^{\alpha}$, $\alpha \leqslant 2$. Более общие результаты того же типа (в особенности для $n=1$) см. в [222], [312, т. 2]. В качестве иллюстрации к теореме рассмотрим

Пример 2.10. Оператор $\mathscr{L}u = -u'' - x^2 u$ на оси. Уравнение $\mathscr{L}u = iu$ имеет решения

$$u = \exp(-ix^2/2)\left(c_1 + c_2 \int_0^x \exp(it^2)\, dt\right).$$

Поскольку $\int_{\mathbf{R}} \exp(it^2)\, dt = \sqrt{\pi/2} \neq 0$, единственное решение из L_2 есть $u \equiv 0$, и то же верно для уравнения $\mathscr{L}u = -iu$. Поэтому $\mathscr{L}$ сущ. с. с. на C_0^{∞}.

Отметим, что оператор (2.18) с потенциалом $V(x) = -|x|^a$, $a > 2$, уже не сущ. с. с. на C_0^{∞}.

2.7. Оператор Шрёдингера: локальные особенности потенциала. Обсудим случай, когда потенциал V в (2.18) имеет *особенности*, так что условие (2.19) не выполнено. Предположим, что особенности потенциала *локализованы*, т. е. существует замкнутое множество $F \subset X$, такое, что $\mathrm{mes}_n F = 0$ и $V \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. Тогда $\mathscr{L}$ можно рассматривать как д. в. в $X \setminus F$. В соответствии со сказанным в п. 2.3, $\mathscr{L}_{\min}$, $\mathscr{L}_{\max}$ определяются как операторы в пространстве $L_2(X \setminus F)$, естественно отождествляемом с $L_2(X)$. Возникает вопрос о том, требует ли $\mathscr{L}$ граничных условий на F.

Мы ограничимся примерами, в которых множество F — одноточечное: $F=\{0\}$. При $n=1$ будем рассматривать оператор на полуоси $\mathbf{R}_+$.

Теорема 2.8 (см. [312, т. 2]). Пусть потенциал $V=\bar{V}\in C(\bar{\mathbf{R}}_+)$ положителен вблизи точки $x=0$ и пусть существует предел

$$c=\lim_{x\to+0} x^2V(x)(\geqslant 0).$$

Тогда оператор $\mathscr{L}u=-u''+Vu$ требует граничного условия в точке $x=0$ в том и только том случае, если $c<3/4$.

Поясним этот результат на модельном примере $V(x)=cx^{-2}$. Тогда $\mathscr{L}_{\min}\geqslant 0$ и, стало быть, достаточно исследовать ядро оператора $\mathscr{L}_{\max}+I$. Решения уравнения $u''-(cx^2+1)u=0$, принадлежащие классу $L_2(a, \infty)$, $a>0$, имеют вид $\alpha\sqrt{x}K_p(x)$, $p^2=c+1/4$ (K_p — функция Бесселя—Макдональда). При $x\to 0$ они имеют асимптотику $\alpha' x^{-p+1/2}$ и, следовательно, принадлежат $L_2(\mathbf{R}_+)$ лишь при $p<1$, т. е. — при $c<3/4$. Тем самым, оператор $\mathscr{L}_{\min}$ сущ. с. с. в точности при $c\geqslant 3/4$.

Из результатов, относящихся к многомерному случаю, приведем следующий (см. [312, т. 2]).

Теорема 2.9. Пусть $V=\bar{V}\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$, причем $V(x)\geqslant -n(n-4)/4x^2+d$, $d>-\infty$. Тогда оператор (2.18) не требует граничного условия при $x=0$.

Содержателен, в частности, случай $V(x)\equiv 0$ в $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, что соответствует δ-образному потенциалу в $\mathbf{R}^n$. Оператор Лапласа на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ сущ. с. с. при $n\geqslant 4$ и не сущ. с. с. при $n\leqslant 3$. Этот оператор описывает поведение частицы в потенциальном поле «*нулевого радиуса*». Отсутствие сущ. с.-сти означает, что оператор $-\Delta$ на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ требует граничных условий в 0, т. е. физическое описание такой частицы должно включать ее взаимодействие с расположенным в 0 непроницаемым препятствием. При $n=1$, например, с. с. расширение оператора $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ фиксируется заданием граничного условия в нуле вида $y'(0)+\alpha y(0)=0$, $-\infty<\alpha\leqslant\infty$; физически это означает, что плоская волна с импульсом k при отражении от препятствия меняет фазу на величину $\arg((ik-\alpha)/(ik+\alpha))$. В размерностях $n=2, 3$ ситуация значительно сложнее — см. [125], [206].

2.8. Оператор Дирака. Другим важным примером является *оператор Дирака* в $\mathbf{R}^3$ описывающий поведение релятивистской частицы. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ — эрмитовы комплексные матрицы 4×4, удовлетворяющие «*антикоммутационным соотношениям*» $\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk}$, $V\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ — матрица 4×4. Оператор Дирака порождается в пространстве четырехкомпонентных вектор-функций в $\mathbf{R}^3$ д. в.

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+V(x)=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j D_j+\alpha_4+V(x). \qquad (2.22)$$

Оператор $\mathscr{L}_0$, в отличие от оператора Лапласа, не полуограничен, что сразу видно, если применить преобразование Фурье.

Сущ. с. с-сть оператора $\mathscr{L}$ на $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ зависит только от локальных свойств потенциала.

Теорема 2.10 [97]. Для сущ. с-сти оператора (2.22) необходимо и достаточно, чтобы для любого шара $B\subset\mathbf{R}^3$ был сущ. с. с. оператор Дирака с потенциалом $\chi_B V$, где χ_B — характеристическая функция шара B.

Доказывается сущ. с. с-сть оператора Дирака, как правило, методами теории возмущений.

Пример 2.11. *Оператор Дирака со скалярным кулоновым потенциалом.* Пусть $V(x)=c|x|^{-1}$. Можно показать ([312, т. 2]), что $\mathscr{L}_{\min}$ сущ. с. с. при $|c|<\sqrt{3}/2$. С учетом величины заряда и массы электрона это соответствует атомам с атомным номером $Z<118$. Обсуждение возможных физических последствий см. в [172], [312, т. 2].

§ 3. Задание оператора с помощью квадратичной формы

Один из важнейших методов задания самосопряженного оператора — *вариационный* или, по другой терминологии, — «*метод форм*». Этот метод, применимый в полуограниченном случае, основан на теореме Фридрихса (теореме 1.5) о построении с. с. оператора по квадратичной форме.

Качественные и количественные характеристики спектра полуограниченного с. с. оператора хорошо описываются в терминах его квадратичной формы; примером может служить формула (1.13). Это часто позволяет обходиться при спектральном анализе без явного описания области определения оператора и даже, более того, без явного описания его «действия». Метод форм, как мы увидим, позволяет значительно снижать условия регулярности границы области и коэффициентов д. в., а также условия суммируемости потенциала в операторе Шрёдингера и т. п. Более того, этот метод применим и тогда, когда минимальный оператор не определен (т. е. $\mathscr{L}$ не отображает C_0^∞ в L_2), а потому схема расширений, изложенная в § 2, не работает. Если минимальный оператор существует, полуограничен снизу и не сущ. с. с., то метод форм выделяет из всевозможных с. с. реализаций $\mathscr{L}$ одну определенную — именно, расширение $\mathscr{L}_{\min}$ по Фридрихсу.

Построение д. о. по квадратичной форме тесно связано с задачами классического вариационного исчисления. Д. в. $\mathscr{L}$, соответствующее форме, — это левая часть уравнения Эйлера;

последнее приходится понимать «в смысле интегрального тождества». Граничные условия для $\mathcal{L}$ делятся на два типа: одни из них («главные») — это условия, входящие в описание области определения формы. Другие — это «естественные» условия в смысле вариационного исчисления.

3.1. Примеры. Приведем несколько типичных примеров.

Пример 3.1. *Граничные задачи для эллиптического оператора 2-го порядка* (ср. пример 2.6). Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — произвольная область,

$$l[u] = \int_X \Big(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}(x) D_{x_i} u \overline{D_{x_j} u} + a_0(x) |u|^2 \Big) dx; \tag{3.1}$$

квадратичный функционал (3.1) формально соответствует д. в. (2.8), т. е. получается из (2.8) при умножении на $\bar{u}$ и интегрировании по частям без учета граничных членов. Предположим, что коэффициенты $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $a_0 = \bar{a}_0$ измеримы, ограничены[1] и удовлетворяют условию (2.9). При достаточно большом $c \in \mathbf{R}$ форма $l[u] + c\|u\|^2$ определяет метрику пространства $H^1(X)$ и, следовательно, на $H^1(X)$ форма (3.1) замкнута. Пусть $\mathcal{L}_N$ (*оператор задачи Неймана*) — соответствующий с. с. оператор в $L_2(X)$. Если область X ограничена, ее граница и коэффициенты a_{ij} — достаточно гладкие, то $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_{\text{II}}$, где $\mathcal{L}_{\text{II}}$ — оператор (2.14). В общем случае описание оператора, данное в (2.14), теряет силу.

Форма (3.1) замкнута и полуограничена также на любом замкнутом подпространстве в $H^1(X)$, в частности, на $\overset{0}{H}{}^1(X)$. Оператор $\mathcal{L}_D = Op(l \restriction \overset{0}{H}{}^1(X))$ в гладком случае совпадает с оператором (2.13).

Аналогично, пусть $F \subset \partial X$ — замкнутое множество и $\overset{0}{H}{}^1(X; F)$ — замыкание в $H^1(X)$ множества функций, равных нулю в окрестности F. Положим $\mathcal{L}_{D(F)} = Op(l \restriction \overset{0}{H}{}^1(X; F))$. Грубо говоря, функции из области определения этого оператора удовлетворяют условию Дирихле на F и условию Неймана на $\partial X \setminus F$. Если множество F — «слишком бедное» (имеет нулевую емкость), то $\mathcal{L}_{D(F)} = \mathcal{L}_N$.

Положим теперь, для $u \in H^1(X)$,

$$l_\sigma[u] = l[u] + \int_{\partial X} \sigma(x) |u|^2 dS(x), \tag{3.2}$$

где l — форма (3.1) и $\sigma = \bar{\sigma} \in L_\infty(\partial X)$; считаем, что граница компактна и принадлежит классу C^2, так что граничный интеграл в (3.2), в силу теоремы вложения, представляет собой непрерывный в $H^1(X)$ квадратичный функционал. Оператор $\mathcal{L}_\sigma = Op(l_\sigma \restriction H^1(X))$ в гладком случае совпадает с оператором (2.15).

[1] Условие $a_0 \in L_\infty(X)$ можно ослабить.

При принятых условиях на коэффициенты a_{ij} и на область (ослабленных по сравнению с примером (2.6)) построить с. с. реализации оператора $\mathscr{L}$, расширяя минимальный оператор $\mathscr{L}\restriction C_0^\infty$, вообще говоря, нельзя, так как здесь уже не обязательно $\mathscr{L}:C_0^\infty\to L_2$.

Следующий пример иллюстрирует трудности, связанные с аналитическим описанием области определения оператора $\mathscr{L}_D$, заданного вариационно.

Пример 3.2. Оператор $(-\Delta)_D$ в области с углами. Пусть (r, φ) — полярные координаты в $\mathbf{R}^2$ и $X=\{(r, \varphi):0<r<1, 0<\varphi<\pi/\alpha\}$, $\alpha>1/2$. Функция u, принадлежащая $H_2\cap \overset{0}{H}{}^1$ вне окрестности точки 0 и равна $r^\alpha \sin \alpha\varphi$ вблизи 0, содержится в $D(\Delta_D)$, однако $u\in H^2(X)$ лишь в случае $\alpha\geqslant 1$. Таким образом, при $\alpha<1$ имеем $D(\Delta_D)\not\subset H^2(X)$. Аналогичный эффект имеет место и для задачи N; для задач типа $\mathscr{L}_{D(F)}$ он возникает и при $\partial X\in C^\infty$. Подробнее по поводу операторов в областях с углами, ребрами и т. п. см. [80].

Пример 3.3. *Задачи D и N для полигармонического оператора.* Пусть снова $X\subset\mathbf{R}^n$ — произвольная область и

$$l[u]=\int_X |\nabla_r u|^2 dx=\sum_{|\alpha|=r}\frac{r!}{\alpha!}\int_X |D^\alpha u|^2 dx. \qquad (3.3)$$

Квадратичному функционалу (3.3) формально отвечает оператор $(-\Delta)^r$. Функционал (3.3) замкнут и неотрицателен на $\overset{0}{H}{}^r(X)$. С. с. оператор $Op(l\restriction \overset{0}{H}{}^r(X))$ при $\partial X\in C^\infty$ совпадает с $(-\Delta)^r_D$ (см. пример 2.7), Оператор, отвечающий форме $l\restriction H^r(X)$, по аналогии со случаем $r=1$, обозначим $(-\Delta)^r_N$. Здесь все граничные условия естественные. Даже при $\partial X\in C^\infty$, в случае $r>1$, их явное описание довольно сложно.

Пример 3.4. *Операторы задач D, N для вырождающихся эллиптических д. в.* Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ ограниченная область с гладкой границей ∂X и $\rho=\rho(x)$ — *регуляризованное расстояние* до ∂X, т. е. гладкая положительная функция на X, равная $\operatorname{dist}(x, \partial X)$ в некоторой окрастности ∂X. Форма

$$l_\alpha[u]=\int_X \rho^\alpha\Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}(x)\, D_{x_i}u\overline{D_{x_j}u}+|u|^2\Big)dx, \qquad (3.4)$$

где коэффициенты $a_{ij}=\overline{a}_{ji}\in L_\infty(X)$ удовлетворяют условиям (2.9), определяет метрику весового пространства Соболева $H^1_\alpha(X)$ [122]. Форма $l_\alpha\restriction H^1_\alpha(X)$ неотрицательна и замкнута. Отвечающий ей с. с. оператор в $L_2(X)$ обозначим $\mathscr{L}_{\alpha,N}$.

Той же форме (3.4), рассматриваемой на классе $\overset{0}{H}{}^1_\alpha(X)$ (замыкании в $H^1_\alpha(X)$ множества $C_0^\infty(X)$), отвечает оператор $\mathscr{L}_{\alpha,D}$. Если $\alpha\geqslant 1$, то $\overset{0}{H}{}^1_\alpha=H^1_\alpha$, т. е. множество $C_0^\infty(X)$ плотно в H^1_α; в этом случае $\mathscr{L}_{\alpha,N}=\mathscr{L}_{\alpha,D}$.

Квадратичному функционалу (3.4) соответствует д. в.

$$\mathcal{L}_\alpha u = \sum_{1<i,j<n} D_{x_j}(\rho^\alpha a_{ij}(x) D_{x_i} u) + \rho^\alpha u.$$

Аналитическое описание областей определения $D(\mathcal{L}_{\alpha, D})$, $D(\mathcal{L}_{\alpha, N})$ существенно сложнее, чем при $\alpha=0$.

Пример 3.5. *Задача D для неэллиптических д. в с постоянными коэффициентами.* Пусть $\mathcal{L}(\xi)$ — вещественный полином в $\mathbf{R}^n$, такой, что $\inf\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n} \mathcal{L}(\xi) > -\infty$. С помощью преобразования Фурье легко убедиться в том, что оператор $\mathcal{L}=\mathcal{L}(D)$ симметричен и полуограничен снизу на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, а потому и на $C_0^\infty(X)$, где $X\subset\mathbf{R}^n$ — произвольная область. Расширение по Фридрихсу оператора $\mathcal{L}\restriction C_0^\infty(X)$ обозначим $\mathcal{L}_D(X)$ или, короче, $\mathcal{L}_D$. Если д. в. $\mathcal{L}$ не эллиптично, то явное описание граничных условий в общем случае вряд ли возможно.

3.2. Оператор Шрёдингера и его обобщения. Здесь приводятся примеры, связанные с оператором Шрёдингера (2.18).

Пример 3.6. Пусть

$$V=\bar{V}\geqslant c>-\infty, \quad V\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n). \tag{3.5}$$

Умножая д. в. (2.18) на $\bar{u}$ и формально интегрируя по частям, получим квадратичный функционал

$$a[u]=\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla u|^2+V|u|^2)\,dx. \tag{3.6}$$

На естественной области определения $d[a]=H^1\cap L_{2,|V|}$ он полуограничен и замкнут. Соответствующий с. с. оператор A принимают за реализацию д. в. (2.18).

В данном случае можно дать более или менее явное описание области определения оператора A (Като, см. [312, т. 2]):

$$D(A)=\{u\in L_2(\mathbf{R}^n): Vu\in L_{1,\mathrm{loc}},\ -\Delta u+Vu\in L_2\}.$$

Обсудим этот пример еще с одной точки зрения. Пусть $a_0[u]=\int|\nabla u|^2dx$, $b[u]=\int V|u|^2dx$; тогда $d[a_0]=H^1$, $d[b]=L_{2,|V|}$, и форма $a=a_0+b$ оказывается замкнутой на естественной области определения $d[a_0]\cap d[b]$. Форме a_0 отвечает оператор $A_0=-\Delta$, форме b — оператор $B: u\mapsto Vu$. По определению, операторное равенство $A=A_0+B$ включает, в частности, равенство $D(A)=D(A_0)\cap D(B)$, которое в данном случае означает разделимость оператора и, вообще говоря, не выполнено.

В подобных случаях принято говорить, что $A=A_0+B$ в смысле форм.

Условие $V\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ не является необходимым для того, чтобы оператор Шрёдингера (2.18) можно было реализовать как с. с. оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$, соответствующий форме (3.6). Важно лишь, чтобы естественная область определения формы (3.6) была плотна в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Так, можно рассматривать потенциалы $V \in \overset{0}{L}_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \setminus F)$, где F — замкнуто и $\mathrm{mes}_n F = 0$; при этом $d[a] = H^1(\mathbf{R}^n \setminus F) \cap L_{2,|V|}$. Типичный пример: $V(x) = c\,|x|^{-\alpha}$, $c > 0$ $\forall \alpha > 0$. Еще один пример — «*оператор Шрёдингера с δ-образным потенциалом*», отвечающий форме

$$a[u] = \int_{\mathbf{R}^1} |u'|^2\,dx + |u(0)|^2, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^1).$$

По аналогии с примером 3.6 может быть рассмотрен

Пример 3.7 *Обобщенный оператор Шрёдингера.* Пусть «потенциал» V удовлетворяет условиям (3.5). Рассмотрим квадратичный функционал на $H^r \cap L_{2,\,|V|}$:

$$a_r[u] = \int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla_r u|^2 + V(x)\,|u|^2)\,dx. \tag{3.7}$$

Функционал (3.7) замкнут и полуограничен в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Оператор $Op(a_r)$ принимают за реализацию д. в.

$$\mathscr{L}u = (-\Delta)^r u + Vu. \tag{3.8}$$

3.3. Неполуограниченные потенциалы. Полуограниченность оператора Шрёдингера не обязательно связана с полуограниченностью потенциала V, нужно лишь, чтобы отрицательная часть формы (3.6) погашалась положительной. Ниже через $V_\pm$ обозначены положительная и отрицательная части потенциала V, т. е. $2V_\pm = |V| \pm V$.

Пример 3.8 (*Обобщенный*) *оператор Шрёдингера со слабо неполуограниченным потенциалом.* Пусть $V_+ \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, а для V_- при некоторых $a \in (0, 1)$, $b \geqslant 0$ выполнено условие

$$\int V_-\,|u|^2\,dx \leqslant a \int |\nabla_r u|^2\,dx + b \int |u|^2\,dx \quad \forall u \in H^r(\mathbf{R}^n). \tag{3.9}$$

При этих условиях функционал (3.7) полуограничен и замкнут на области определения $H^1 \cap L_{2,\,V+}$. Соответствующий с. с. оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$ по-прежнему принимают за реализацию д. в. (3.8). В частности, при $r=1$ получаем реализацию оператора Шрёдингера (2.18).

Из (3.9) можно выводить конкретные условия полуограниченности. Этот подход дает возможность рассматривать потенциалы с более сильными локальными отрицательными особенностями, нежели подход, основанный на теореме 1.1. Так, пусть

$$\gamma = 1\,(n < 2r);\ \gamma > 1\,(n = 2r);\ \gamma = n/2r\,(n > 2r). \tag{3.10}$$

В силу теорем вложения, неравенство (3.9) выполнено, если $V_- \in L_\infty + L_\gamma$. При $n \geqslant 2$ это позволяет, в частности, определить оператор Шрёдингера с потенциалом $-c|x|^{-\alpha}$, $c > 0$, $\alpha < 2$. Потенциал $-c|x|^{-2}$ включается в рассмотрение на основании *неравенства Харди*

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx<\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2dx,\quad 0\neq u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\tag{3.11}$$

Постоянная при интеграле слева — точная. Из (3.11) следует, что при $n\geqslant 3$, $4c<(n-2)^2$ полуограничена и замкнута на $H^1(\mathbf{R}^n)$ форма (3.5) с потенциалом $V(x)=-c|x|^{-2}$.

3.4. Взвешенный полигармонический оператор. Здесь мы рассмотрим примеры операторов, определяемых вариационными тройками (см. п. 1.10). В наших примерах будет

$$a[u]=a_{r,\varepsilon}[u]=\int\limits_X(|\nabla_r u|^2+\varepsilon|u|^2)\,dx,\quad r\geqslant 1,\quad \varepsilon\geqslant 0;\tag{3.12}$$

$$b[u]=b_p[u]=\int\limits_X|u|^2p\,dx,\tag{3.13}$$

при различных предположениях об области $X\subset\mathbf{R}^n$, вещественнозначной функции p и о характере граничных условий, задающих пространство d. Если T — оператор, определяемый тройкой $\{d;\ a_{r,\varepsilon},\ b_p\}$, то из равенства $Tf=u$ следует, что u удовлетворяет (в смысле интегрального тождества) уравнению

$$(-\Delta)^r u+\varepsilon u=pf;\tag{3.14}$$

поэтому будем говорить о «взвешенном полигармоническом операторе».

Пример 3.9. *Задача D в ограниченной области.* Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ произвольная ограниченная область, $d=\overset{0}{H}{}^r(X)$; тогда при любом $\varepsilon\geqslant 0$ форма (3.12) определяет норму в d. Пусть

$$p\in L_\gamma(X),\ \gamma\ \text{определено в (3.10).}\tag{3.15}$$

Тогда, в силу теоремы вложения, форма (3.13) ограничена в d (и компактна). Оператор $T\{\overset{0}{H}{}^r_1(X);\ a_{r,\varepsilon},\ b_p\}$, $\varepsilon\geqslant 0$ будем называть *оператором задачи D для уравнения* (3.14).

Пример 3.10. *Задача N.* Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей и выполнено (3.15). Оператор $T\{H^r(X);\ a_{r,\varepsilon},\ b_p\}$, $\varepsilon>0$, будем называть *оператором задачи N для уравнения* (3.14).

Определение оператора задачи N для $\varepsilon=0$ осложняется тем, что при $\varepsilon=0$ форма (3.12) уже не задает метрики в H^r (вырождается на пространстве полиномов степени, меньшей r). В качестве d здесь следует принять некоторое подпространство конечного дефекта в H^r, на котором форма (3.12) не вырождена. При разумном выборе d (зависящем от «веса» p в (3.13)) сохраняется связь оператора $T\{d;\ a_{r,0},\ b_p\}$ с уравнением (3.14); подробности см. в [22].

Пример 3.11. *Задача Стеклова.* Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — область с границей класса C^2, $\sigma = \bar{\sigma} \in L_\infty(\partial X)$, $\int\limits_{\partial X} \sigma dS \neq 0$,

$$d = \left\{ u \in H^1(X) \colon \int\limits_{\partial X} u \sigma dS = 0 \right\};$$

$$a[u] = \int\limits_X |\nabla u|^2 dx, \quad b[u] = \int\limits_{\partial X} \sigma |u|^2 dS.$$

Тройке $\{d; a, b\}$ отвечает *оператор задачи Стеклова*:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad X; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial X} = \sigma f. \tag{3.16}$$

Пример 3.12. *Задача Дирихле в неограниченной области.* Переход к неограниченным X связан с двумя новыми затруднениями. Одно из них — чисто техническое — заключается в том, что условия ограниченности формы (3.13) относительно a-метрики, вообще говоря, выглядят сложнее, чем для ограниченных X. Другое затруднение, появляющееся лишь при $\varepsilon = 0$, имеет более принципиальный характер. Дело в том, что пространство $\overset{0}{H}{}^r(X)$ не обязательно полно относительно метрики (3.12) с $\varepsilon = 0$ и потому не может быть принято в качестве d. Его пополнение не всегда является пространством функций; так, при $X = \mathbf{R}^1$, $r = 1$, получается факторпространство пространства $\mathscr{L}_2^1 = \{u \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^1) \colon u' \in L_2(\mathbf{R}^1)\}$ по подпространству констант. На таком пространстве не имеет смысла форма (3.13). Этих затруднений не возникает, например, если $2r < n$ и множество $\mathbf{R}^n \setminus X$ ограничено: тогда пополнение класса $\overset{0}{H}{}^r(X)$ по метрике $a_{r,0}$ представляет собой пространство функций (обозначим его $\overset{0}{\mathscr{H}}{}^r(X)$). Именно,

$$\overset{0}{\mathscr{H}}{}^r(X) = \left\{ u \in H^r_{\mathrm{loc}}(X) \colon u|_{\partial X} = 0, \quad \int\limits_X |x|^{-2r} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}. \tag{3.17}$$

Если $p \in L_{n/2r}(X)$, то форма (3.13) ограничена в $\overset{0}{\mathscr{H}}{}^r(X)$, так что $\{\overset{0}{\mathscr{H}}{}^r(X);\ a_{r,0},\ b_p\}$ — вариационная тройка. Отвечающий ей оператор и принимается за оператор задачи D для уравнения (3.14).

§ 4. Примеры точного вычисления спектра

Имеются два основных источника появления дифференциальных операторов, допускающих точное вычисление спектра. Один — это инвариантные операторы на группах Ли или на однородных пространствах, когда спектральные характеристики вычисляются средствами теории представлений. Второй (на самом деле, тесно связанный с первым) — это специальные функции и разделение переменных. Примеры второго рода в большом числе имеются в стандартных учебниках математической физики.

Примеры операторов, спектр которых явно вычисляется, важны по многим причинам. В частности, они дают возможность проследить закономерности, которые в общей обстановке усмотреть подчас довольно трудно. Нередко анализ этих примеров является первым шагом при доказательстве утверждений общего характера — см., например, оценки спектра регулярных эллиптических д. о. в п. 5.2 и вычисление асимптотики спектра вариационным методом в § 11. Далее, операторы, спектр которых известен, служат исходным материалом при использовании средств теории возмущений — см., например, § 8.

Здесь мы приведем несколько примеров, которые будут использованы в дальнейшем. Они вполне элементарны, и их анализ не требует прямых ссылок на теорию представлений. Более сложные примеры, в которых связь с представлениями групп используется по-существу, приведены в § 16.

4.1. Операторы с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^n$ и на торе.

Пример 4.1. *Скалярные д. о. в* $\mathbf{R}^n$. Пусть $\mathscr{L}=\mathscr{L}(D)$ — с. с. д. о. в $L_2(\mathbf{R}^n)$ с постоянными коэффициентами, рассматриваемый на области определения (2.17). Применение преобразования Фурье превращает $\mathscr{L}$ в оператор умножения на вещественный символ $\mathscr{L}(\xi)$; это реализует спектральную теорему 1.4 и, следовательно, приводит к полному спектральному анализу оператора.

Спектр $\sigma(\mathscr{L})$ — чисто непрерывный (если $\operatorname{ord}\mathscr{L}>0$) и совпадает с замыканием множества значений символа $\mathscr{L}(\xi)$, $\xi\in\mathbf{R}^n$. Спектральный проектор $E^{\mathscr{L}}(\delta)$ для любого борелевского множества $\delta\subset\mathbf{R}$ выражается формулой $E^{\mathscr{L}}(\delta)=\Phi^{-1}X_{\mathscr{L}^{-1}(\delta)}\Phi$, где Φ — преобразование Фурье, а X_e — оператор умножения на характеристическую функцию множества $e\subset\mathbf{R}^n$.

В частности, при любом $r>0$ спектр оператора $(-\Delta)^r \restriction H^2{}_r(\mathbf{R}^n)$ совпадает с полуосью $[0, \infty)$.

Преобразование Фурье позволяет также провести спектральный анализ д. о. с постоянными коэффициентами на вектор-функциях. В частности, для невозмущенного оператора Дирака (т. е. для оператора (2.22) при $V(x)\equiv0$) спектр совпадает с множеством $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$.

Приведем еще одно доказательство утверждения примера 4.1. Воспользуемся тем, что число $\lambda\in\mathbf{R}$ принадлежит спектру с. с. оператора A в том и только том случае, если найдется такая последовательность $\{u_k\}_1^\infty$, $u_k\in D(A)$, $\|u_k\|=1$, что $\|Au_k-\lambda u_k\|\to0$.

Зафиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, такую, что $\|\varphi\|_{L_2}=1$. Обозначим через $s(\mathscr{L})$ множество значений функции $\mathscr{L}(\xi)$. Предположим, что $\lambda \in s(\mathscr{L})$, т. е. $\lambda=\mathscr{L}(\xi)$ при некотором $\xi \in \mathbf{R}^n$ Рассмотрим функции $u_k(x)=k^{-n/2}\exp(i\xi\cdot x)\varphi(k^{-1}x)$, $k=1,2,\ldots$. Тогда $\|u_k\|=1$ и, как показывает прямое вычисление, $\|\mathscr{L}u_k-\lambda u_k\|\to 0$; тем самым, $\lambda \in \sigma(\mathscr{L})$, т. е. $s(\mathscr{L})\subset\sigma(\mathscr{L})$, а потому $\overline{s(\mathscr{L})}\subset\sigma(\mathscr{L})$.

Множество $s(\mathscr{L})$ — это либо вся ось $\mathbf{R}$ (тогда и $\sigma(\mathscr{L})=\mathbf{R}$), либо некоторая полуось. Пусть, для определенности, $\overline{s(\mathscr{L})}=[\lambda_0+\infty]$. Переходя к Фурье-образам, получаем, что при $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

$$(\mathscr{L}u,\ u)=\int \mathscr{L}(\xi)|\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \lambda_0\|u\|^2,$$

и, следовательно, левее точки λ_0 спектра нет.

Это доказательство лишь в малой степени использует преобразование Фурье и потому может быть легко приспособлено к анализу следующего примера.

Пример 4.2. *Оператор $\mathscr{L}_D(X)$* (см. пример 3.5) *в неограниченной области.* Предположим, что область $X\subset\mathbf{R}^n$ содержит шары сколь угодно большого радиуса. Тогда спектр оператора $\mathscr{L}_D(X)$ совпадает с замыканием множества значений символа $\mathscr{L}(\xi)$.

В самом деле, для доказательства включения $\overline{s(\mathscr{L})}\subset\sigma(\mathscr{L})$ достаточно рассмотреть подходящие сдвиги использованных выше функций u_k. Доказательство обратного включения не изменяется.

Пример 4.3. *Скалярные д. о на торе* $\mathbf{T}^n$. Ниже под *тором* $\mathbf{T}^n$ поднимается многообразие $\mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n$ с *плоской метрикой*, т. е., римановой метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^n$. Д. о. с постоянными коэффициентами $\mathscr{L}=\mathscr{L}(D)$ с. с. в $L_2(\mathbf{T}^n)$ в том и только в том случае, если символ $\mathscr{L}(\xi)$ — вещественный.

Функции $\exp ij\cdot x$, $j\in\mathbf{Z}^n$, — собственные для оператора $\mathscr{L}$; так как система $\{\exp ij\cdot x\}$ полна в $L_2(\mathbf{T}^n)$, то спектр $\sigma(\mathscr{L})$ — чисто точечный. Собственные значения равны $\mathscr{L}(j)$, $j\in\mathbf{Z}^n$. Если $|\mathscr{L}(\xi)|\to\infty$ при $|\xi|\to\infty$, то $\mathscr{L}$ — оператор с дискретным спектром.

Пример 4.4. *Д. о. в пространстве вектор-функций на торе.* Пусть $\mathscr{L}=\mathscr{L}(D)$ — с. с. оператор на вектор-функциях размерности k. Его символ $\mathscr{L}(\xi)$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, — эрмитова $k\times k$-матрица. Пусть $\{\lambda_l(\xi)\}$, $\{f_l(\xi)\}$, $l\in\overline{1,k}$, — ее собственные значения (с учетом кратностей) и ортонормированные в $\mathbf{C}^k$ собственные векторы. Вектор-функции $\{f_l(j)\exp ij\cdot x\}$, $j\in\mathbf{Z}^n$, $l\in\overline{1,k}$, образуют полную в $(L_2(\mathbf{T}^n))^k$ систему собственных функций оператора $\mathscr{L}$. Следовательно, спектр — чисто точечный; $\sigma_p(\mathscr{L})$ состоит из всевозможных собственных чисел $\lambda_l(j)$. Если при достаточно больших $|\xi|$ матрица $\mathscr{L}(\xi)$ обратима и $\|\mathscr{L}^{-1}(\xi)\|\to 0$ при $|\xi|\to\infty$, то $\sigma(\mathscr{L})=\sigma_p(\mathscr{L})$.

4.2. Метод факторизации. Пусть W — дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^1$. Рассмотрим два д. в.

$$l_{\pm}u = \pm du/dx + W(x)\,u, \tag{4.1}$$

тогда

$$l_+l_-u = -\frac{d^2u}{dx^2} + (W^2 + W')\,u, \quad l_-l_+u = -\frac{d^2u}{dx^2} + (W^2 - W')\,u. \tag{4.2}$$

Если $l_+l_-u = \lambda u$ и $v = l_-u \neq 0$, то $l_-l_+v = l_-l_+l_-u = \lambda v$. Отсюда видно, что «формальные» собственные значения $\lambda \neq 0$ (мы пока не предполагаем, что $u, v \in L_2$) у обоих операторов (4.2) — общие. Это простое соображение иногда позволяет находить точечный спектр дифференциальных операторов.

Пример 4.5. *Гармонический осциллятор.* Оператор в $L_2(\mathbf{R}^1)$

$$(\mathscr{L}u)(x) = -u'' + x^2u, \quad D(\mathscr{L}) = \{u \in H^2(\mathbf{R}^1) : x^2u \in L_2\} \tag{4.3}$$

самосопряжен. Если в (4.1) принять $W(x) = x$, то

$$\mathscr{L} = l_+l_- - I = l_-l_+ + I.$$

Уравнение $l_+u = 0$ имеет решение $u_0(x) = \exp(-x^2/2) \in L^2$. Положим $u_k = l_-^k u_0$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда

$$l_-l_+u_1 = l_-l_+l_-u_0 = l_-(2I + l_-l_+)\,u_0 = 2u_1.$$

Повторяя выкладку, найдем по индукции, что $l_-l_+u_k = 2ku_k$. Функции u_k — это, с точностью до нормировки, функции Эрмита $H_k(x)$. Система Эрмита полна в $L_2(\mathbf{R}^1)$, так что числа $2k$ исчерпывают спектр оператора l_-l_+. Следовательно, спектр оператора (4.3) состоит из простых собственных значений $\lambda_k = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

К этому примеру сводится

Пример 4.5′. *Многомерный гармонический осциллятор.* Пусть B — положительно определенная $(n \times n)$-матрица. Оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$

$$\mathscr{L}u = -\Delta u + (Bx, x)\,u, \quad D(\mathscr{L}) = \{u \in H^2(\mathbf{R}^n) : |x|^2 u \in L_2\}$$

самосопряжен. Ортогональны преобразованием координат в $\mathbf{R}^n$, диагонализующим B, оператор приводится к виду $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \mu_j^2 y_j^2\right)$, где μ_j^2 — собственные значения матрицы B. Из этого следует, что спектр $\mathscr{L}$ состоит из собственных значений

$$\lambda_k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_j (2k_j - 1), \quad k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n;$$

в такой записи автоматически учтена их кратность. Соответствующие собственные функции суть $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} H_{k_j}(\mu_j y_j)$.

Пример 4.6. Оператор

$$\mathscr{L}_a u = -u'' - \frac{a(a+1)}{\operatorname{ch}^2 x}\,u, \quad a > 0, \quad D(\mathscr{L}_a) = H^2(\mathbf{R}^1), \tag{4.4}$$

самосопряжен (это следует, например, из теоремы 2.4). Его существенный спектр совпадает с полуосью $[0, \infty)$ (см. ниже теорему 6.2), и речь идет о вычислении отрицательных собственных значений.

Обозначим через $l_{\pm}^{(a)}$ операторы (4.1) при $W(x)=a\,\mathrm{th}\,x$. Имеем

$$l_{-}^{(a)}l_{+}^{(a)}=\mathscr{L}_a+a^2I,\quad l_{+}^{(a)}l_{-}^{(a)}=\mathscr{L}_{a-1}+a^2I.$$

Уравнение $l_{+}^{(a)}u=0$ имеет решение $u_a(x)=(\mathrm{ch}\,x)^{-a}\in L_2$, следовательно, $-a^2\in\sigma_p(\mathscr{L}_a)$. Если $a>1$, то $-(a-1)^2\in\sigma_p(\mathscr{L}_{a-1})$ или, что то же самое, $2a-1\in\sigma_p(l_{+}^{(a)}l_{-}^{(a)})$, с собственной функцией u_{a-1}. Функция $(l_{-}^{(a)}u_{a-1})(x)=(2a-1)(\mathrm{ch}\,x)^{-a}\,\mathrm{sh}\,x\in L_2$, стало быть, $2a-1\in\sigma_p(l_{-}^{(a)}l_{+}^{(a)})$ и $-(a-1)^2\in\sigma_p(\mathscr{L}_a)$. Продолжая по индукции, находим, что если $n-1<a\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$, то числа $-(a-k)^2$, $k\in\overline{0, n}$, принадлежат $\sigma_p(\mathscr{L}_a)$. Можно показать, что они исчерпывают точечный спектр оператора $\mathscr{L}_a$.

4.3. Операторы на сфере и полусфере.

Пример 4.7. *Оператор Лапласа—Бельтрами на сфере* S^n. Для него полную систему собственных функций образуют сферические функции. Спектр состоит из собственных значений $\lambda_k=k(k+n-1)$, $k\geqslant 0$, каждое из которых имеет кратность

$$\binom{n+k-1}{n-1}+\binom{n+k-2}{n-1},$$

где символ $\binom{p}{q}$ обозначает число сочетаний из p по q; если $p<q$, то, по определению, $\binom{p}{q}=0$.

Пример 4.8. *Задачи* D, N *для оператора Лапласа—Бельтрами на полусфере* $S_{+}^{n}=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\colon |x|=1,\ x_{n+1}>0\}$. Собственные функции операторов $-\Delta_D$, $-\Delta_N$ — это, соответственно, четные или нечетные относительно x_{n+1} сферические функции. Спектр обоих операторов, как и в примере 4.7, состоит из собственных значений $\lambda_k=k(k+n-1)$, причем $k\geqslant 0$ для оператора $-\Delta_N$ и $k>0$ для оператора $-\Delta_D$. Кратность собственного значения λ_k равна $\binom{n+k-1}{n-1}$ для $-\Delta_N$ и $\binom{n+k-2}{n-1}$ для $-\Delta_D$.

В п. 16.5 мы значительно обобщим этом пример.

§ 5. Дифференциальные операторы с дискретным спектром. Оценки собственных значений

Дискретность спектра как правило устанавливается на основании следующего утверждения, относящегося к общей теории операторов.

Лемма 5.1. Пусть A — с. с. оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $D(A)$ — его область определения с A-метрикой

(1.1) и (в положительно определенном случае) $d[a]=D(A^{1/2})$ — область определения его квадратичной формы с a-метрикой $a[x]=\|A^{1/2}x\|^2$. Для дискретности спектра оператора A необходимо и достаточно, чтобы был компактен любой из двух операторов вложения

$$I_A:D(A)\to\mathfrak{H};\quad I_a:d[a]\to\mathfrak{H}. \tag{5.1}$$

Коль скоро дискретность спектра установлена, возникают вопросы количественного характера: об оценках собственных значений и собственных функций, об их асимптотическом поведении и т. п. Асимптотике спектра посвящены § 9—15. Здесь мы затронем более простой, но, тем не менее, важный вопрос об оценках.

5.1. Основные примеры д. о. с дискретным спектром.

Пример 5.1. *Регулярные эллиптические операторы* A (см. теоремы 2.1, 2.2). Если $\operatorname{ord} A=m$, то $D(A)\subset H^m(X)$, причем A-метрика (1.1) порождает на $D(A)$ топологию пространства $H^m(X)$. Так как в случае гладких компактных многообразий (с краем или без края), вложение $H^m\to L_2$ компактно, то спектр A дискретен.

Пример 5.2. *Оператор* $(-\Delta)^r_D$ *в области* $X\subset\mathbf{R}^n$ (см. пример 3.3). Лемма 5.1 прямо сводит вопрос о дискретности его спектра к вопросу о компактности вложения $I_0:\overset{0}{H}{}^r(X)\to L_2(X)$. Оператор I_0 компактен, например, для любой области X конечной меры — в том числе для любой ограниченной области. Простое необходимое условие компактности вложения I_0, допускающее также некоторые области X бесконечной меры, состоит в том, что для любого $d>0$ в X можно поместить лишь конечное число дизъюнктных кубов с ребром d. При $2r>n$ это условие не только необходимо, но и достаточно. Подобный критерий имеется и при $2r\leqslant n$, однако здесь надо рассматривать кубы, которые могут содержать некоторую достаточно малую (в смысле емкости) порцию дополнения к X; точную формулировку см. в [101].

Пример 5.3. *Оператор* $(-\Delta)^r_N$ (см. пример 3.3). Вместо формы $l[u]$ вида (3.3), здесь удобнее рассматривать форму $l[u]+$ $+\|u\|^2_{L_2}$, что не меняет характера спектра. Его дискретность, согласно лемме 5.1, равносильна компактности оператора вложения $I:H^r(X)\to L_2(X)$. Последняя требует существенно более жестких, по сравнению с примером 5.2, условий на X. Достаточно, например, чтобы область X была ограничена, а ее граница — липшицева. Точные условия см. в [101].

Все сказанное в примерах 5.2, 5.3 автоматически переносится на случай операторов с переменными коэффициентами. Нужно лишь, чтобы соответствующая квадратичная форма $a[u]$ (или хотя бы форма $a[u]+c\|u\|^2_{L_2}$ при достаточно большом c) определяла на $d[a]\subset H^r(X)$ метрику пространства H^r. В частности, в условиях примера 3.1 дискретен спектр оператора $\mathscr{L}_D$, если $X\subset\subset\mathbf{R}^n$ — произвольная область конечной меры; оператора $\mathscr{L}_N$, если X — ограниченная область и липшицевой границей.

Пример 5.4. *Вырождающиеся эллиптические операторы 2-го порядка* (см. пример 3.4). Здесь вопрос решается теоремами вложения для весовых классов Соболева; спектр дискретен в том и только том случае, если $\alpha<2$.

Пример 5.5. *Оператор Шрёдингера с растущим потенциалом.* Пусть в условиях примера 3.6 $V(x)\to+\infty$ ($|x|\to\infty$). Не ограничивая общности, считаем $V(x)\geqslant 1$, тогда $a[u]$ — форма (3.6) — положительно определена в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и найдем такое $r>0$, что $V(x)\geqslant\varepsilon^{-1}$ вне шара $B_r=\{x\in\mathbf{R}^n : |x|<r\}$. Множество $\{u\in d[a] : a[u]\leqslant 1\}$ ограничено в H^1 и, следовательно, компактно в $L_2(B_r)$; вместе с тем

$$\int\limits_{|x|>r}|u|^2\,dx\leqslant\varepsilon\int V(x)|u|^2\,dx\leqslant\varepsilon a[u]\leqslant\varepsilon\quad(a[u]\leqslant 1).$$

Отсюда непосредственно вытекает компактность оператора вложения I_a из (5.1) и, стало быть, если $V(x)\to+\infty$ ($|x|\to\infty$), то спектр оператора Шрёдингера, определяемого формой (3.6) в $L_2(\mathbf{R}^n)$ дискретен. Точно так же обстоит дело для обобщенного оператора Шрёдингера из примера 3.7.

Приведенное рассуждение опиралось на два факта: малость L_2-нормы u вне достаточно большого шара относительно $a[u]$ и компактность вложения $d[a]$ в L_2 в ограниченной области. Первый из них вытекал из стремления потенциала к $+\infty$, второй — из его локальной полуограниченности. Фактически оба условия можно ослабить. В частности (см. [18], [19]), при $n=1$ для дискретности спектра достаточно, чтобы при любом $h>0$ величина

$$\varphi_h(x)=\int\limits_x^{x+h}V_+(t)\,dt$$ стремилась к бесконечности, когда $|x|\to\infty$,

а величина $V_-(x)$ была бы мала по сравнению с $\varphi_h(x)$, — например, $V_-\in L_1+L_\infty$. При $\inf V(x)>-\infty$ это условие оказывается и необходимым.

Аналогичные признаки дискретности спектра имеют место и для оператора (3.8), но лишь при $2r>n$. Если $2r\leqslant n$, то критерий дискретности, даже для полуограниченного потенциала, формулируется в терминах емкости (см. [101]).

5.2. Оценки собственных значений. Для регулярных эллиптических операторов имеют место точные по порядку оценки

$$N_\pm(\lambda;\ A)\leqslant c(A)\lambda^{n/m},\quad\lambda\geqslant 1,\quad n=\dim X,\quad m=\operatorname{ord}A;\qquad(5.2)$$

здесь $N_\pm(\lambda;\ A)$ — функции (1.16) распределения положительного и отрицательного спектна оператора A. Для самих собственных значений $\pm\lambda_j^\pm(A)$ оценка, равносильная (5.2), имеет вид

$$\lambda_j^\pm(A)\geqslant c'(A)\,j^{m/n}.$$

В справедливости оценки (5.2) проще всего убедиться на примере операторов с постоянными коэффициентами на торе $\mathbf{T}^n$ (см. примеры 4.3, 4.4).

Так, пусть $\mathscr{L}$ — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, с положительным главным символом $\mathscr{L}^0(\xi)$.

Собственные значения оператора совпадают с $\mathscr{L}(j)$, $j \in \mathbf{Z}^n$. В силу условия равномерной эллиптичности (2.7), $\mathscr{L}^0(j) \geqslant \geqslant \gamma |j|^m$, а потому, очевидно, $\mathscr{L}(j) \geqslant \gamma_0 |j|^m - C$ с некоторыми $\gamma_0 \in (0, \gamma)$, $C \geqslant 0$. Следовательно, величины $N_\pm(\lambda; \mathscr{L})$ конечны, оцениваются сверху количеством точек $j \in \mathbf{Z}^n$, лежащих в шаре $|j| < (\gamma_0^{-1}(\lambda + C))^{1/m}$. При больших λ число таких точек совпадает по порядку с объемом шара, и мы получаем оценку (5.2).

Один из способов доказательства оценки (5.2) в общей ситуации состоит в сведении задачи к разобранному случаю. Оценка (5.2) справедлива также для широкого класса операторов, заданных с помощью квадратичной формы (например, в условиях примеров 3.1, 3.3).

Оценки, аналогичные (5.2), справедливы и для спектральной функции регулярных эллиптических операторов. Так, если оператор $\mathscr{L}$ полуограничен снизу, то для функции (1.14)

$$e^A(\lambda; x, y) = O(\lambda^{n/m}) \text{ равномерно на } X \times X. \tag{5.3}$$

$$e^A(\lambda; x, y) = O(\lambda^{(n-1)/m})$$

$$\text{равномерно на любом компакте в } X \times X \setminus \text{diag}. \tag{5.4}$$

Если A — оператор на вектор-функциях, то такие же оценки верны для матричных элементов ядра (1.15); в неполуограниченном случае оценки (5.3), (5.4) справедливы для функций $e_\pm^A(\lambda; x, y)$. Как показал Агмон [169], оценку (5.3) можно вывести, опираясь лишь на теоремы вложения для пространств Соболева. Оценка (5.3) влечет (5.2), поскольку, например, для полуограниченных операторов в области $X \subset \mathbf{R}^n$, как видно из (1.15),

$$N(\lambda; A) = \operatorname{Tr} E^A((-\infty, \lambda)) = \int_X \operatorname{tr} e^A(\lambda; x, x)\, dx.$$

Дальнейшее развитие оценок вида (5.2) заключается в уточнении константы $C(A)$. Так, для оператора $(-\Delta)^r_N$ в ограниченной области $X \subset \mathbf{R}^n$ выполнена оценка (см. [132])

$$N(\lambda; (-\Delta)^r_D) \leqslant c_{r,n} \operatorname{mes} X \cdot \lambda^{n/2r} \quad \forall \lambda > 0, \tag{5.5}$$

с константой $c_{r,n}$ не зависящей от X. На другие краевые задачи оценка вида (5.5) переносится не полностью; так, для задачи N константа в оценке зависит от X (портится при ухудшении свойств границы). Кроме того, сама оценка нарушается при малых λ из-за наличия у оператора $(-\Delta)^r_N$ нулевого собственного значения.

Независимость (для задачи D) оценок от области позволяет распространить (5.5) на случай неограниченных областей:

оценка (5.5) справедлива для произвольного открытого множества конечной меры; это включает, в частности, утверждение о дискретности спектра оператора $(-\Delta)^r_N$ (см. пример 5.2).

5.3. Оценки спектра взвешенного полигармонического оператора (см. п. 3.4). Речь пойдет о спектре задач D и N для уравнения

$$pu=\lambda((-\Delta)^r u+\varepsilon u),\quad \varepsilon\geqslant 0, \tag{5.6}$$

соответствующего уравнению (3.14). Постановка задачи — вариационная: под спектром задачи D или N для уравнения (5.6) понимается спектр вариационной тройки $\{d;\ a_{r,\varepsilon},\ b_p\}$, где $a_{r,\varepsilon}, b_p$ — формы (3.12), (3.13), а $d=\overset{0}{H}{}^r(X)$ (задача D) или $d=H^r(X)$ (задача N). Для этих задач удается получить оценки функций $n_\pm(\lambda)$ (см. (1.20)) через интегральные нормы «веса» p. Такие оценки имеют важные применения при исследовании спектральных асимптотик вариационным методом (см. § 11), а также при исследовании спектра оператора Шрёдингера.

Пример 5.6. *Задача D для уравнения* (5.6). В предположениях, принятых в примерах 3.9, 3.12 (т. е. для ограниченных $X\subset\mathbf{R}^n$ при условии (3.15); для неограниченных $X\subset\mathbf{R}^n$, $n>2r$, — при $p\in L_{n/2r}(X)$) оператор T, отвечающий тройке $\{\overset{0}{H}{}^r(X);\ a_{r,\varepsilon},\ b_p\}$ компактен.

В условиях примера 5.6 справедливы оценки

$$n_\pm(\lambda;\ T)\leqslant c\,\|p_\pm\|^{n/2r}_{L_\gamma(X)}\lambda^{-n/2r}\quad \forall\lambda>0. \tag{5.7}$$

В (5.7) γ — показатель, определенный в (3.10). Постоянная c не зависит от функции p и от $\varepsilon\geqslant 0$; если $2r<n$, то она не зависит также от области $X\subset\mathbf{R}^n$. Если только одна из функций $p_\pm$ принадлежит $L_\gamma(X)$, а другая — лишь $L_{1,\mathrm{loc}}(X)$, то верна (5.7) с соответствующим знаком. Оценка (5.7) содержит в себе (при $p\equiv 1$, $2r<n$) оценку (5.5).

Оценка (5.7) принимает особенно простой вид при $2r<n$. Мы выпишем ее для наиболее важного случая $r=1$:

$$n_\pm(\lambda;T)\leqslant c_n\lambda^{-n/2}\int\limits_X p_\pm^{n/2}dx,\quad \forall\lambda>0;\ n\geqslant 3. \tag{5.8}$$

В обсуждаемых условиях справедлива (см. § 9) асимптотика

$$n_\pm(\lambda;\ T)\sim v_n(2\pi)^{-n}\lambda^{-n/2}\int\limits_X p_\pm^{n/2}dx,\quad \lambda\to+0, \tag{5.9}$$

(v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$). Таким образом, оценка (5.8) точна в смысле, что в ее правой части стоит тот же функционал от p, что и в асимптотической формуле. Для $n\leqslant 2$ (и для $n\leqslant 2r$ при любом $r>1$) подобных оценок не существует.

Мы видим, что в условиях примера 5.6 требования на p, обеспечивающие компактность оператора T завышены: в самом деле, из них следует весьма сильная оценка (5.8) (а при $2r<n$ — и асимптотика (5.9)). Условия на p можно ослабить, но это требует «локализации» особенностей; так в случае гладкой границы ∂X оператор T компактен при $|p(x)|\leqslant \leqslant c[\operatorname{dist}(x, \partial X)]^{-\beta}$, $\beta<2r$. Об оценках для этого случая см. [23], [134].

Пример 5.7. *Задача N для уравнения* (5.6). В условиях примера 3.10 оператор T, определяемый вариационной тройкой $\{H^r(X); a_{r,\varepsilon}, b_p\}$, компактен, и для него сохраняется оценка (5.7). Теперь, однако, постоянная c_n в (5.8) зависит не только от X, но и от $\varepsilon>0$. Как и в примере 5.6, компактность оператора T имеет место и при более слабых условиях на p.

Из оценки (5.8) (для задачи D) легко выводится важная оценка спектра оператора Шрёдингера.

Теорема 5.1. При $n\geqslant 3$ для оператора (2.18) имеет место оценка

$$N(\lambda; \mathscr{L})\leqslant c_n \int_{\mathbf{R}^n} (\lambda-V(x))_+^{n/2}\, dx = c_n \Phi(V, \lambda), \tag{5.10}$$

верная всегда, когда конечен входящий в нее интеграл, в частности, и тогда, когда лишь часть спектра, лежащая в $(-\infty, \lambda)$, дискретна.

Для доказательства рассмотрим, при фиксированном $\lambda\in\mathbf{R}$, в пространстве $\overset{0}{\mathscr{H}}{}^1(\mathbf{R}^n)$ (см. (3.17)) квадратичную форму $b_\lambda[u]= =\int (V(x)-\lambda)|u|^2\, dx$. Она вообще говоря, не ограничена; однако, если $(\lambda-V)_+\in L_{n/2}$, то она полуограничена снизу и замкнута на области определения $\{u\in\overset{0}{\mathscr{H}}{}^1(\mathbf{R}^n):\int|V(x)-\lambda||u|^2\, dx<\infty\}$. Пусть $T_\lambda=Op(b_\lambda)$. В соответствии с формулой (1.13),

$$N(-1; T_\lambda)=$$

$$=\max\dim\{F\subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n):\int(V-\lambda)|u|^2\, dx<-\int|\nabla u|^2\, dx,\ 0\neq u\in F\}.$$

Применяя ту же формулу (1.13) к оператору (2.18) в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$, находим:

$$N(\lambda; \mathscr{L})=$$

$$=\max\dim\{F\subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n):\int(|\nabla u|^2+V|u|^2)\, dx<\lambda\int|u|^2 dx,$$
$$0\neq u\in F\}$$

Таким образом,

$$N(\lambda; \mathscr{L})=N(-1; T_\lambda)=n_-(1; T_\lambda).$$

Остается применить оценку (5.8).

При $\lambda=0$ из (5.10) получается важная оценка числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера:

$$N(0; \mathscr{L})\leqslant c_n\int V_-^{n/2} dx.$$

Оценка (5.8) и вытекающая из нее оценка (5.10) были получены Г. В. Розенблюмом [131] и позднее переоткрыты Либом и Цвикелем (см. [312, т. 4]).

При дополнительных условиях на потенциал V для $N(\lambda; \mathscr{L})$ выполнена асимптотическая формула $N(\lambda; \mathscr{L}) \sim (2\pi)^{-n} v_n \Phi(V, \lambda)$, $\lambda \to \infty$. Тем не менее легко строятся потенциалы, когда оценка (5.10) неточна: $N(\lambda; \mathscr{L}) < \infty$, а $\Phi(V, \lambda) = \infty$ при всех $\lambda > 0$.

Аналогичные оценки при $n=1, 2$ выглядят сложнее. Мы приведем один из простейших результатов для случая $n=1$ (см., например, [16], [312, т. 4]).

Теорема 5.2. Для оператора Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^1)$ имеет место оценка

$$N(\lambda; \mathscr{L}) \leqslant \int_{\mathbf{R}^1} |x| (\lambda - V(x))_+ dx + 1. \tag{5.11}$$

5.4. Оценки спектра: эвристика. Оценки типа (5.8), (5.10) укладываются в следующую общую схему, имеющую эвристическое значение (ср. обсуждение формул спектральной асимптотики в § 9). Пусть A — с. с. полуограниченный д. о. в области $X \subset \mathbf{R}^n$, $A(x, \xi)$ — его символ. Рассмотрим множества

$$\mathscr{E}(\lambda; A) = \{(x, \xi) \in X \times \mathbf{R}^n : A(x, \xi) < \lambda\}.$$

Тогда $N(\lambda; A)$ оценивается сверху величиной $c_1 \mathrm{mes}_{2n} \mathscr{E}(c_2\lambda; A)$, во многих случаях такие оценки являются двусторонними. Они легко модифицируются также на случай уравнений типа (5.6).

Такие оценки могут нарушаться, если символ $A(x, \xi)$ и область X недостаточно регулярны. В этих случаях $N(\lambda; A)$ часто оценивается через количество дизъюнктных единичных кубов, которые можно поместить в области $\mathscr{E}(\lambda; A)$. Недавно Фефферман [226] предложил еще более общую концепцию, согласно которой $N(\lambda; A)$ сравнимо с количеством дизъюнктных «ящиков» вида $Q_\delta(x_0) \times Q_{\delta^{-1}}(\xi_0)$, которые можно поместить в $\mathscr{E}(\lambda; A)$. Здесь через $Q_h(z)$ обозначен n-мерный куб с центром в точке z и с ребром h.

Область применимости этой концепции пока не выяснена; для оператора Шрёдингера с некоторым классом потенциалов она оправдана в [227].

В качестве иллюстрации приведем следующий (более ранний) результат Г. В. Розенблюма [132]; очевидно он укладывается в рамки концепции Феффермана.

Теорема 5.3 (см. пример 5.2). Пусть X — область в $\mathbf{R}^n$ и пусть для любого $d > 0$ в X можно поместить лишь конечное число $Z(d)$ попарно дизъюнктных кубов с ребром d. Тогда для оператора $(-\Delta)^r_D$ в области X при $2r > n$ имеют место оценки

$$Z(c_1 \lambda^{-1/2r}) \leqslant N(\lambda) \leqslant Z(c_2 \lambda^{-1/2r}).$$

5.5. Оценки собственных функций. Для оператора Шрёдингера спектральная функция $e^A(\xi; x, x)$ допускает при фиксированном x такую же оценку (5.3), что и для регулярных граничных задач. Эта оценка, однако, не характеризует поведения собственных функций $\varphi(x)$ при $x \to \infty$. Оказывается, что в случае растущего потенциала собственные функции весьма быстро убывают. Верен, в частности, следующий результат.

Теорема 5.4 (см. [312, т. 4]). Пусть $V \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда для любой собственной функции $\varphi(x)$ выполнена оценка

$$\varphi(x) = O(\exp(-a|x|)) \quad \forall a > 0.$$

Если же $V(x) \geqslant c|x|^{2k}$ при достаточно больших $|x|$, то

$$|\varphi(x)| = O\left(\exp\left(-\frac{(c-\varepsilon)^{1/2}}{n+1}|x|^{k+1}\right)\right) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

§ 6. Дифференциальные операторы с непустым существенным спектром

Важнейший пример д. о. с непустым существенным спектром — это оператор Шрёдингера (2.18) с потенциалом, не стремящимся к бесконечности. При этом возникает много новых вопросов: о расположении существенного спектра; о его спектральных характеристиках (в первую очередь интересуются условиями абсолютной непрерывности спектра, см. п. 1.6; о расположении и свойствах дискретной части спектра; о собственных значениях на непрерывном спектре и т. д.) Наиболее важные для приложений классы потенциалов, для которых имеются сравнительно полные результаты — это потенциалы, стремящиеся к нулю при $|x| \to \infty$, а также периодические потенциалы. В настоящее время бурно развивается также теория оператора Шрёдингера с почти-периодическим потенциалом, однако она еще далека от завершения. Материал, относящийся к двум последним типам потенциалов, излагается в § 17, 18; здесь мы ограничимся случаем $V(x) \to 0$, опуская при этом те вопросы, которые скорее относятся к теории рассеяния, в том числе вопрос об условиях абсолютной непрерывности существенного спектра. Мы вынесем также в отдельный § 7 изложение некоторых фактов, относящихся к спектральной теории многочастичного оператора Шрёдингера.

6.1. Устойчивость существенного спектра относительно компактных возмущений резольвенты. Расположение существенного спектра часто удается определять на основе следующего результата, относящегося к абстрактной теории возмущений (см. [27]).

Теорема 6.1. Пусть A, A_0 — с. с. операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем для какого-либо (а тогда и для любого) $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(A_0)$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}-(A_0-\lambda I)^{-1}$ компактен. Тогда

$$\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(A_0). \tag{6.1}$$

Если операторы A, A_0 введены через квадратичные формы, то взамен теоремы 6.1 удобнее применять такое ее

Следствие. Пусть a_0 — положительно определенная замкнутая форма в $\mathfrak{H}$; пусть на $d=d[a_0]$ задана форма a, такая, что оператор, порожденный вариационной тройкой $\{d; a_0, a-a_0\}$ компактен. Тогда форма a полуограничена и замкнута на d и для операторов $A=Op(a)$, $A_0=Op(a_0)$ выполнено (6.1).

Если форма a_0 лишь полуограничена, то при применении следствия ее следует заменить на $a_0[u]+c\|u\|^2$ при достаточно большом c. Важно отметить, что как в условии теоремы, так и в условии следствия не обязательно $D(A)=D(A_0)$.

6.2. Существенный спектр оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом. Пусть $Au=-\Delta u+Vu$ — с. с. оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^n)$, определенный, в зависимости от условий на V, либо замыканием с C_0^∞ (как в теореме 2.6), либо с помощью метода форм (как в примере 3.6). Если

$$V(x)\to 0 \quad (|x|\to\infty), \tag{6.2}$$

то при некоторых дополнительных локальных условиях на V оказывается, что

$$\sigma_{ess}(A)=[0, \infty). \tag{6.3}$$

Один из простейших точных результатов на этот счет таков.

Теорема 6.2. Пусть $V\in L_{\infty,loc}$ и выполнено (6.2), т. е. $\operatorname{ess\,sup}_{|x|\geqslant R}|V(x)|\to 0$ $(|x|\to\infty)$. Тогда выполнено (6.3).

Этот результат легко выводится из теоремы 6.1 (или следствия из нее). Он сохраняется также, если допустить локальные особенности потенциала: например, если $V_+\in L_{\infty,loc}$, $V_-\in L_{\gamma,loc}$, где γ — показатель из (3.10) (при $r=1$), и выполнено (6.2). Другие варианты условий на V, влекущие (6.3), можно найти в [312, т. 4].

Если в условиях теоремы 6.2 еще и $V(x)\geqslant 0$, то форма (3.6) неотрицательна, а потому и спектр неотрицателен. Таким образом, спектр оператора Шрёдингера с неотрицательным потенциалом, удовлетворяющим условиям теоремы 6.2, совпадает с полуосью $[0, \infty)$.

6.3. Отрицательный спектр оператора Шрёдингера. Если $V(x)<0$ на множестве ненулевой меры, то у оператора может появиться непустой отрицательный спектр. В силу теоремы 6.2, он заведомо дискретен. В зависимости от свойств потенциала, он может оказаться конечным или бесконечным. Приведем соответствующие примеры.

Пример 6.1. *Атом водорода.* В пространстве $L_2(\mathbf{R}^3)$ рассмотрим оператор

$$\mathscr{L}u = -\Delta u - |x|^{-1}u.$$

Здесь $V = -V_- \in L_{\gamma,\mathrm{loc}}$ при $\gamma < 3$, так что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{L}) = [0, \infty)$. Отрицательный спектр бесконечен и состоит из собственных значений $\lambda_k = -(4k^2)^{-1}$ кратности k^2. Собственные функции выражаются через полиномы Лагерра и сферические функции; подробнее см., например, [208].

Пример 6.2. В пространстве $L_2(\mathbf{R}_+)$ рассмотрим операторы $\mathscr{L}_D$ (условие $u(0)=0$) и $\mathscr{L}_N$ (условие $u'(0)=0$), определяемые дифференциальным выражением

$$\mathscr{L}u = -u'' - V_h u; \quad V_h(x) = h^2 \quad (x \leqslant 1), \quad V_h(x) = 0 \quad (x > 1).$$

Для обоих операторов существенный спектр заполняет полуось $[0, +\infty)$. Собственные значения легко вычисляются: $\lambda_k(\mathscr{L}) = h^2 - p_k^2$, где p_k — решения уравнения $\operatorname{tg} p = -p(h^2 - p^2)^{-1/2}$ $(\mathscr{L} = \mathscr{L}_D)$ и уравнения $\operatorname{tg} p = p^{-1}(h^2 - p^2)^{1/2}$ $(\mathscr{L} = \mathscr{L}_N)$. Отсюда видно, что отрицательный спектр конечен:

$$N(0; \mathscr{L}_D) = 0 \quad (h \leqslant \pi/2);$$

$$N(0; \mathscr{L}_D) = l \quad ((l - 1/2)\pi < 2h \leqslant (l + 1/2)\pi, \ l \geqslant 1),$$

$$N(0; \mathscr{L}_N) = l \quad ((l-1)\pi < h \leqslant l\pi; \ l \geqslant 1).$$

Изучение отрицательного спектра оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом удается свести к исследованию спектра уравнений вида (5.6) (при $r=1$). Абстрактная схема такого сведения разработана М. Ш. Бирманом [18], [19]; мы приведем лишь простейший результат из [19].

Теорема 6.3. Пусть A, A_0 — с. с. полуограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем $A_0 > 0$; пусть $a = QF(A)$, $a_0 = QF(A_0)$ и $d[a] = d[a_0] = d$. Пусть T_ε, $\varepsilon > 0$, — оператор, определяемый вариационной тройкой $\{d;\ a_0[u] + \varepsilon\|u\|^2;\ a - a_0\}$. Тогда

$$N(-\varepsilon; A) = n_-(1; T_\varepsilon). \tag{6.4}$$

Если оператор A_0 положительно определен, то (6.4) справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Доказательство сводится к сравнению формул, прямо вытекающих из (1.13), (1.21) (ср. доказательство теоремы 5.1):

$$N(-\varepsilon; A) = \max \dim \{F \subset d : a[u] + \varepsilon\|u\|^2 < 0\},$$

$$n_-(1; T_\varepsilon) = \max \dim \{F \subset d : a[u] - a_0[u] < -a_0[u] - \varepsilon\|u\|^2\}.$$

Утверждение, относящееся к случаю $\varepsilon = 0$, можно распространить на любые $A \geqslant 0$, однако формулировка усложняется (см. [19]).

Равенство (6.4), как и некоторые его обобщения, называют *принципом Бирмана-Швингера»*. Оно явилось эффективным инструментом исследования разнообразных задач на спектр. Проиллюстрируем его применение на примере оператора (3.8) с потенциалом $V<0$. Будем считать, что $V\in L_\infty+L_\gamma$, где γ — показатель из (3.10). Пусть $A_0=(-\Delta)^r \restriction H^{2r}(\mathbf{R}^n)$, $A=Op(a)$, где a — форма (3.7), тогда $d[a]=d[a_0]=H^r$. Оператор T_ε в (6.4) — это оператор, определяемый вариационной тройкой $\{H^r(\mathbf{R}^n)$, $a_{r,\varepsilon}$, $b_V\}$, где $a_{r,\varepsilon}$ — форма (3.12), и b_V — форма вида (3.13). Тем самым исследование отрицательного спектра оператора (3.8) сведено к задаче о спектре уравнения (5.6). Особенно важен, разумеется, случай $r=1$.

Мы видим, в частности, что конечность отрицательного спектра оператора (3.8) равносильна равномерной по $\varepsilon>0$ оценке величины $n_-(1;\ T_\varepsilon)$. Не предполагая, что $V(x)\to 0(|x|\to\infty)$, находим, что дискретность отрицательного спектра равносильна условию $n_-(1;\ T_\varepsilon)<\infty\, \forall\varepsilon>0$.

Наиболее просто оценивается величина $n_-(1;\ T_\varepsilon)$ — а, стало быть, и $N(-\varepsilon;\ A)$ — при $2r<n$. В частности, согласно (5.8),

$$N(-\varepsilon,\ A)\leqslant\int[V(x)+\varepsilon]_-^{n/2}dx,\quad \varepsilon>0,\quad n\geqslant 3. \tag{6.5}$$

Как отмечалось в § 5, эта оценка справедлива для произвольных вещественных потенциалов $V\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Из (6.5) вытекает, что если $V_-\in L_{n/2}(\mathbf{R}^n)$, $n\geqslant 3$, то отрицательный спектр оператора Шрёдингера с потенциалом V конечен. Так будет, например, если $V_-\in L_\infty$ и $V(x)\sim -c|x|^{-\alpha}$, $\alpha>0$, $\forall c>0$, при $|x|\to\infty$. Если при $|x|\to\infty\, V(x)\sim -c|x|^{-2}$, то конечность отрицательного спектра можно утверждать лишь при $4c<(n-2)^2$; это вытекает из неравенства Харди (3.11).

Если $\int V_-^{n/2}dx<c_n^{-1}$, $n\geqslant 3$, то, в силу (6.5), отрицательный спектр отсутствует. При $n=1, 2$ дело обстоит иначе: если $V\leqslant 0$ и $V\not\equiv 0$, то оператор Шрёдингера с потенциалом V обязательно имеет отрицательные собственные значения. Особенно просто в этом убедиться при $n=1$: фиксируем функцию $\varphi\in C_0^\infty$, $\varphi(x)=1$ при $x\in(-1,\ 1)$, и положим $\varphi_k(x)=\varphi(x/k)$. Тогда при $k\to\infty$

$$\int(|\varphi_k'|^2+V|\varphi_k|^2)\,dx\to\int V\,dx<0,$$

и, в соответствии с (1.13), отрицательный спектр непуст.

По физической терминологии, в точке $\lambda=0$ оператор $-d^2/dx^2$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$ имеет *виртуальный уровень*. Для оператора на полуоси наличие или отсутствие виртуального уровня в нуле определяется граничным условием: для оператора задачи N он есть (доказательство — то же, что в случае оси). Для оператора задачи D его нет, что вытекает из другого варианта неравенства Харди:

$$4\int x^{-2}|u|^2dx<\int|u'|^2dx\quad \forall u\in\overset{0}{H}{}^1(\mathbf{R}_+).$$

Таким образом, при $V_-(x)<4x^{-2}$ отрицательных собственных значений заведомо нет.

Сказанное хорошо иллюстрируется примером 6.2.

При $2r>n$ оценок отрицательного спектра, аналогичных оценке (6.5), нет. Наиболее точные по порядку оценки получены в [63]. Для одномерного оператора Шрёдингера имеются простые оценки (см. [19]) для оператора на оси, либо на полуоси при условии N:

$$N(-\varepsilon;\ A)\leqslant\int|x|(V(x)+\varepsilon)_{-}dx+1$$

(ср. с (5.11)) и

$$N(-\varepsilon;\ A)\leqslant(2\varepsilon)^{-1}\int(1-e^{-2\varepsilon|x|})V_{-}(x)\,dx+1;$$

для оператора задачи D на полуоси слагаемое 1 нужно отбросить.

Из теоремы 6.3 и ее аналогов просто получаются удобные критерии конечности и дискретности отрицательного спектра (обобщенного) оператора Шрёдингера сразу для всех потенциалов семейства $\alpha V(x)$, $\alpha>0$. Так, для дискретности отрицательного спектра всех операторов $A_\alpha=-\Delta+\alpha V(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $(T_1)_{-}$ — отрицательная часть оператора T_1 — была компактна. В [19] получен ряд условий компактности таких операторов. Например, достаточно, чтобы для какого-либо a интеграл $\int\limits_{|y-x|<a}(1+|y-x|^{1-n})V_{-}(y)\,dy$ стремился к нулю при $|x|\to\infty$.

Компактность оператора T_ε следует из компактности вложения пространств $D(A)$ или $d[a]$ в весовое пространство $L_{2,|V|}$, при $V\leqslant0$ — эквивалентна этой компактности. В [101] получены необходимые и достаточные условия компактности этого вложения в терминах емкости; более того, если потенциал V меняет знак, то V_+ может отчасти компенсировать V_-; говоря точнее, компактность T_ε эквивалентна компактности вложения в L_{2,V_-} пространства $H^r\cap L_{2,V_+}$. В [101] имеются критерии компактности и для этого случая. Количественных оценок, подобных (6.5), в столь общей ситуации пока нет.

6.4. Оператор Дирака. Для оператора Дирака (2.22), ввиду его неполуограниченности, отсутствует вариационная постановка задачи. Спектральные свойства оператора Дирака можно исследовать на основе теоремы 6.1, которая, однако, не дает количественных оценок дискретного спектра.

Согласно теореме 6.1, если оператор умножения на потенциал $V(x)$ компактен как оператор из $(H^1(\mathbf{R}^3))^4$ в $(L_2)^4$, то существенный спектр оператора (2.22) совпадает с существенным спектром невозмущенного оператора, т. е. с $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Это имеет место, в частности, если $V(x)=O(|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, при больших $|x|$, $|\nabla V(x)|\leqslant C$, $V\in L_{p,\,\mathrm{loc}}$, $p>3$; последние два условия обеспечивают самосопряженность оператора (2.22) на $(H^1)^4$.

6.5. О собственных значениях на непрерывном спектре. Для одночастотного оператора Шрёдингера (а также для оператора Дирака) с потенциалом, достаточно быстро убывающим при $|x|\to\infty$, с физической точки зрения естественно ожидать отсутствия собственных значений на непрерывном спектре; см. обсуждение в [312, § XIII.13]. Имеющиеся доказательства этого факта опираются на следующую теорему единственности (см. [312, т. 4]).

Теорема 6.4. Пусть $u\in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и пусть на некотором связном открытом множестве $X\subset\mathbf{R}^n$ почти везде выполнеиа оценка

$$|\Delta u(x)|\leqslant M|u(x)|. \tag{6.6}$$

Тогда если $u(x)=0$ в окрестности какой-либо точки $x_0\in X$, то $u\equiv 0$ в X.

На основании теоремы 6.4 несложно доказывается отсутствие собственных значений $\lambda>0$ у оператора Шрёдингера с финитным потенциалом $V(x)$. Предположим, что существует (связная) область $X_0\subset\mathbf{R}^n$, такая, что $\overline{X}_0=\mathbf{R}^n$ и $V\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(X_0)$; это условие допускает, в частности, любые локальные особенности потенциала. Если u — собственная функция оператора $-\Delta+V$, отвечающая собственному значению λ, то вне носителя V будет $\Delta u+\lambda u=0$; при $\lambda\geqslant 0$ это уравнение не имеет решений из L_2, а потому собственная функция u финитна. С другой стороны, в X_0

$$|\Delta u(x)|\leqslant(\lambda+|V(x)|)|u(x)|$$

и, следовательно, в любой строго внутренней подобласти $X\subset X_0$ выполнено (6.6). Применяя теорему 6.4, находим, что $u\equiv 0$.

Без предположения финитности потенциалов доказательство значительно усложняется. Простейшие условия, при которых оператор Шрёдингера не имеет положительных собственных значений, состоят в том, что $V\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и $|x|V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ (*теорема Като*); по поводу более общих условий см. [312, § XIII.13]. Там же дан обзор других способов доказательства; в частности, изложены методы, позволяющие устанавливать обсуждаемое свойство для многочастичных операторов.

6.6. О существенном спектре оператора Стокса. Еще один тип д. о. с непустым существенным спектром возникает в теории систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу. Мы ограничимся простейшим примером; по поводу общих результатов см. [234].

Пример 6.3. *Оператор Стокса.* Пусть д. в. $\mathscr{L}$ действует на 4-мерные вектор-функции $w=(u,v)$, $u\in(L_2)^3$, $v\in L_2$:

$$\mathscr{L}w=\begin{pmatrix}-\Delta & -\mathrm{grad}\\ \mathrm{div} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

В ограниченной области $X\subset\mathbf{R}^3$ с гладкой границей рассмотрим операторы

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L} \restriction \{w \in D_{\max}(\mathcal{L}) : u|_{\partial X} = 0\};$$

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{L} \restriction \left\{w \in D_{\max}(\mathcal{L}) : \frac{\partial u}{\partial n} + (n, v)|_{\partial X} = 0\right\}.$$

Оба граничных условия для $w \in D_{\max}$ имеют смысл; оказывается, что операторы $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_N$ самосопряжены и их существенные спектры — двуточечные:

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_D) = \{-1, -1/2\}; \quad \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_N) = \{-3/2, -1\}.$$

В других случаях существенный спектр оператора, эллиптического по Дуглису — Ниренбергу, может заполнять промежуток; так обстоит дело, например, для оператора, возникающего в безмоментной теории оболочек [7].

§ 7. Многочастичный оператор Шрёдингера

7.1. Задание оператора. Отделение центра масс. Оператор Шрёдингера системы $N \geqslant 3$ взаимодействующих частиц (или $N \geqslant 2$ частиц во внешнем поле) обладает гораздо более тонкими спектральными свойствами, чем одночастичный оператор.

Пусть $x_j \in \mathbf{R}^n$, $j = 1, \ldots, N$, — координаты частиц, имеющих массы μ_j, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^{nN}$. Разумеется, физически интересен случай $n = 3$. Потенциалы парных взаимодействий между частицами являются вещественнозначными функциями $W_{kl}(x_k - x_l)$; в естественных физических ситуациях $W_{kl}(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. При отсутствии внешнего поля оператор Шрёдингера, описывающий такую систему частиц, порождается в $L_2(\mathbf{R}^{nN})$ д. в.

$$\mathcal{L} = T + V = -\sum_j (2\mu_j)^{-1}\Delta_j + \sum_{k<l} W_{kl}(x_k - x_l). \tag{7.1}$$

В примере 2.9 указаны условия сущ. с.-сти этого (и даже несколько общего) оператора на $C_0^\infty(\mathbf{R}^{nN})$. Формально (7.1) можно рассматривать как частный случай оператора (2.18), однако потенциал $V(x) = \sum_{k<l} W_{kl}(x_k - x_l)$, рассматриваемый как функция в $\mathbf{R}^{nN}$, не по всем направлениям стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Это оказывает решающее влияние на спектральные свойства оператора (7.1).

В операторе (7.1) принято *отделять движение центра масс.* Под этим понимается запись оператора в координатах (y_0, y'), отвечающих прямому разложению $\mathbf{R}^{nN} = Y_0 + Y'$. Именно,

$$y_0 = \mu^{-1} \sum_j \mu_j x_j, \quad \mu = \sum_j \mu_j,$$

а за Y' принимается подпространство, натянутое на всевозможные векторы $x_k - x_l$. Это разложение пространства $\mathbf{R}^{nN}$ позволяет разделить переменные в операторе (7.1), т. е. рассмотреть в тензорном разложении $L_2(\mathbf{R}^{nN})=L_2(Y_0)\otimes L_2(Y')$ разложение оператора (7.1)

$$\mathscr{L}=(-2\mu)^{-1}\Delta_{y_0}\otimes I+I\otimes\mathscr{L}'. \qquad (7.2)$$

Из разложения (7.2) следует, что спектр $\mathscr{L}$ заполняет некоторую полуось. Интерес представляет как раз спектр оператора $\mathscr{L}'$, часто называемого *гамильтонианом системы*; в частности, под *спектром системы N частиц* понимают спектр $\mathscr{L}'$. Оператор $\mathscr{L}'$ имеет вид $\mathscr{L}'=H'+W$, где H' — эллиптический д. о. 2-го порядка в $\mathbf{R}^{n(N-1)}$ с постоянными коэффициентами (зависящими от выбора координат y'), потенциал W получается из $\sum\limits_{k<l}W_{kl}(x_k-x_l)$ переходом к координатам y'. Если $N=2$, то оператор $\mathscr{L}'$ совпадает с оператором одной частицы во внешнем поле. Таким образом, задачи о свободной системе двух частиц и об одной частице во внешнем поле эквивалентны; их (некоторая терминологическая неопределенность) называют *одночастичными* или *двухчастичными*. С другой стороны, оператор (2.20) с $N-1$ частицей во внешнем поле можно трактовать как предельный случай гамильтониана свободной системы N частиц при условии, что масса одной из них стремится к бесконечности. При $N\geqslant 3$ такие системы называют *многочастичными*.

7.2. Подсистемы. Существенный спектр. Спектральные свойства многочастичного оператора во многом определяются свойствами подсистем. Пусть Z непустое m-элементное подмножество множества $Z^0=\overline{1,N}$ номеров частиц. Обозначим через $\mathscr{L}_Z$ оператор в $L_2(\mathbf{R}^{mn})$ вида (7.1), но с суммированием по j, k, $l\in Z$ В нем также отделяется движение центра масс, и в соответствующих координатах $(y_{Z,0},\ y_Z')$ получается разложение

$$\mathscr{L}_Z=-(2\mu_Z)^{-1}\Delta_{y_{Z,0}}\otimes I+I\otimes\mathscr{L}'_Z;\quad \mu_Z=\sum_{j\in Z}\mu_j;$$

$\mathscr{L}'_Z$ — гамильтониан подсистемы. При разумных условиях на потенциалы W_{kl} (см. теорему 2.4, а также пример 2.9) операторы $\mathscr{L}_Z$, $\mathscr{L}'_Z$ сущ. с. с. на C_0^∞; те же обозначения сохраним за их с. с. реализациями. В случае, если подсистема состоит из одной частицы, формальное отделение центра масс приводит к оператору $\mathscr{L}_Z'$ в одномерном пространстве $L_2(\mathbf{R}^0)$; здесь принято условно полагать, что спектр $\mathscr{L}_Z'$ состоит из одного собственного числа $\lambda=0$.

Оператор $\mathscr{L}_Z'$ описывает поведение частиц из Z при условии, что отсутствует их взаимодействие с частицами из $Z^0\diagdown Z$.

Пусть теперь $Z^0=Z_1\cup Z_2$ — какое-либо нетривиальное разбиение множества частиц, $N_i=\operatorname{card}Z_i$. Ниже, взамен $Y_{Z_i,0}$, $\mathscr{L}_{Z_i}, \ldots$, будем писать $Y_{i,0}$, $\mathscr{L}_i$ и т. д. Отделение движения центра масс у подсистем Z_1 и Z_2, $\mathbf{R}^{nN_i}=Y_{i,0}+Y'_i$, $i=1, 2$, порождает прямое разложение пространства $Y'=\widetilde{Y}_0+Y'_1+Y'_2$, где $\widetilde{Y}_0=(Y_{1,0}+Y_{2,0})\cap Y'$, $\dim \widetilde{Y}_0=n$. Ему отвечает тензорное разложение

$$L_2(Y')=L_2(\widetilde{Y}_0)\otimes L_2(Y'_1)\otimes L_2(Y'_2), \tag{7.3}$$

а также представление гамильтониана системы в виде

$$\mathcal{L}'=h\otimes I\otimes I+I\otimes\mathcal{L}'_1\otimes I+I\otimes I\otimes\mathcal{L}'_2+\widetilde{W}, \tag{7.4}$$

где h — результат отделения центра масс в операторе $-(2\mu_1)^{-1}\Delta_{1,0}\otimes\otimes I - I\otimes(2\mu_2)^{-1}\Delta_{2,0}$; $\widetilde{W}$ — сумма потенциалов взаимодействия между частицами из разных подсистем.

Поясним смысл отдельных слагаемых в разложении (7.4). Первое слагаемое — д. о. с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^n$ — описывает движение центров масс подсистем относительно их общего центра масс; его спектр заполняет полуось $[0, \infty)$. Второе и третье слагаемые — операторы движения подсистем относительно их центров масс без учета взаимодействия подсистем между собой, которое включается в оператор $\widetilde{W}$.

Пусть у операторов $\mathcal{L}'_i$ фиксированы собственные значения λ_i, $i=1, 2$, с собственными функциями φ_i. Тогда в $L_2(Y')$ выделяется подпространство, имеющее в разложении (7.3) вид

$$\mathfrak{X}_{\varphi_1,\varphi_2}=L_2(\widetilde{Y}_0)\otimes\{\varphi_1\}\otimes\{\varphi_2\};$$

здесь $\{\varphi\}$ — линейное подпространство, натянутое на φ. Пусть $P=P_{\varphi_1,\varphi_2}$ — ортогональный проектор в $L_2(Y')$ на подпространство $\mathfrak{X}_{\varphi_1,\varphi_2}$. Оператор $\mathcal{L}_{\varphi_1,\varphi_2}=P\mathcal{L}'P$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\varphi_1,\varphi_2}=(h+V_{\varphi_1,\varphi_2})\otimes I\otimes I+I\otimes\lambda_1 I\otimes I+I\otimes I\otimes\lambda_2 I, \tag{7.5}$$

$V_{\varphi_1,\varphi_2}=P\widetilde{W}P$. Спектр $\mathcal{L}_{\varphi_1,\varphi_2}$ отличается от спектра оператора $T_{\varphi_1,\varphi_2}=h+V_{\varphi_1,\varphi_2}$ сдвигом на $\lambda_1+\lambda_2$; он исследуется с помощью «одночастичных методов». При разумных условиях регулярности и убывания потенциалов W_{kl} оказывается, что сужение оператора $\mathcal{L}'$ на $\mathfrak{X}_{\varphi_1,\varphi_2}$ является в подходящем смысле слабым возмущением $\mathcal{L}_{\varphi_1,\varphi_2}$ и спектр $\mathcal{L}_{\varphi_1,\varphi_2}$ порождает ветвь спектра $\mathcal{L}'$, называемую в теории рассеяния «каналом».

Аналогичным образом строится представление типа (7.4) для случая разбиения множества индексов Z^0 на произвольное число $p\geqslant 2$ подсистем, для каждой из которых фиксировано собственное значение λ_i (для подсистемы, состоящей лишь из одной частицы, принимают $\lambda_i=0$). Числа вида $\lambda_1+\ldots+\lambda_p$, где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ — всевозможные наборы собственных значений подсистем различных разбиений, называются *множеством порогов*. Множество порогов (обозначаемое Λ) всегда непусто: оно содержит число 0, отвечающее разбиению на одночастичные подсистемы.

Одним из основных результатов спектральной теории многочастичного оператора Шрёдингера является

Теорема 7.1 (Хунцикер—Ван Винтер—Жислин, см. [265], [312, т. 4]). Пусть операторы умножения на W_{kl} компактны как операторы из $H^1(\mathbf{R}^n)$ в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Тогда $\sigma_{ess}(\mathscr{L}')=[\lambda_0, \infty)$, где $\lambda_0=\inf(\lambda\in\Lambda)$.

Поясним теорему 7.1 для случая, когда λ_0 достигается при разбиении на две подсистемы. Спектр оператора $T=\mathscr{L}'-\tilde{W}$, включающего первые три слагаемых в (7.4), устроен весьма просто: если λ_1, λ_2—нижние границы спектра гамильтонианов подсистем $\mathscr{L}'_1$, $\mathscr{L}'_2$, то $\sigma(T)=[\lambda_1+\lambda_2, \infty)$. Смысл теоремы 7.1 в том, что, если разбиение отвечает наименьшей возможной сумме $\lambda_1+\lambda_2$, то возмущение $\tilde{W}$ не может изменить существенный спектр.

В целом оператор $\mathscr{L}'$ оказывается слабым возмущением прямой суммы операторов типа (7.4), отвечающих различным разбиениям на подсистемы.

Каждый порог $\lambda\in\Lambda$ порождает ветвь спектра $\mathscr{L}'$, состоящую из существенного спектра $[\lambda, \infty)$ и не более чем счетного множества собственных значений с единственной возможной предельной точкой в Λ. Эти ветви накладываются друг на друга, и в результате возможно появление собственных значений $\mathscr{L}'$ на непрерывном спектре, что для одночастичных операторов нехарактерно (см. п. 6.5). При этом для потенциалов, удовлетворяющих условиям теоремы 7.1, отсутствуют сингулярный непрерывный спектр и положительные собственные значения.

7.3. Собственные значения. Множество порогов управляет также и собственными значениями оператора. Качественное описание собственных значений дается следующим результатом.

Теорема 7.2 (см. [229], [308]). Пусть потенциалы W_{kl} таковы, что операторы $W_{kl}(-\Delta+I)^{-1}$ и $(-\Delta+I)^{-1}((x\nabla)W_{kl})\times\times(-\Delta+I)^{-1}$ компактны в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Тогда собственные значения $\mathscr{L}'$ образуют нигде не плотное не более, чем счетное, множество с возможными точками сгущения только на множестве порогов Λ.

Заметим, что поскольку пороги выражаются через собственные значения операторов с меньшим числом частиц, множество Λ обладает такими же свойствами, как и множество собственных значений.

Конечность или бесконечность спектра левее λ_0 в значительной степени управляется структурой нижнего порога λ_0. Разбиения на подсистемы, дающие λ_0, называются *определяющими*. Предположим, что все определяющие разбиения состоят из двух подсистем (*двукластерные*), а пороги, отвечающие разбиениям на три и больше подсистем, строго больше λ_0 (отсюда, в частности, следует, что $\lambda_0<0$). В этом случае свойства дискретного спектра λ_0 ниже зависят от спектра операторов T_{φ_1,φ_2}, отвечающих определяющим разбиениям. Это позволяет получать результаты о конечности или бесконечности дискретного спектра (см. [118], [168], [265], [312, т. 4] и указанную там литературу). В частности, при условии достаточно быстрого убывания потенциалов дискретный спектр конечен.

Теорема 7.3. Пусть все определяющие разбиения — двукластерные, преобразование Фурье всех потенциалов W_{kl} принадлежат L_1+L_p, $p<n(n-2)^{-1}$ и, кроме того потенциалы взаимодействия между частицами из различных подсистем каждого определяющего разбиения принадлежат $L_2 \cap L_{3/2}$ при $n=3$ и $L_{n/2}$ при $n>3$. Тогда дискретный спектр левее λ_0 конечен.

С другой стороны, для более медленно убывающих потенциалов установлена бесконечность дискретного спектра ниже λ_0 даже с двусторонней оценкой $N(\lambda;\ \mathcal{L}')$, $\lambda<\lambda_0$, через сумму функций распределения $N(\lambda-\lambda_0,\ T_{\varphi_1,\varphi_2})$ по различным определяющим разбиениям. Существующие оценки и асимптотические формулы для спектра одночастичного оператора (см. §§ 6, 9, 11) позволяют получить аналогичные формулы и в многочастичном случае (см. [118]).

Для конкретных физических систем общие результаты типа теоремы 7.3 часто неприменимы, и их приходится исследовать индивидуальными методами. Так, для атомов и положительных ионов с ядрами произвольной массы, а также для молекул с ядрами бесконечной массы установлена бесконечность дискретного спектра; напротив, для отрицательных ионов спектр конечен (Д. Р. Яфаев, М. А. Антонец, Г. М. Жислин — см. литературу в [118]). Для молекул с ядрами конечной массы вопрос пока открыт.

Иной характер имеет ситуация, когда не все определяющие разбиения — двукластерные. Здесь наиболее исследован случай, когда ни одна из подсистем не имеет собственных значений (тогда $\lambda_0=0$). В этом случае свойства дискретного спектра определяются тонкой структурой нижней границы $\lambda=0$ спектра подсистем. Эту точку называют виртуальным уровнем, если при любом $\varepsilon>0$ добавление к оператору подсистемы потенциала $-\varepsilon(1+|z|)^{-2}$ приводит к появлению собственных значений.

Первые результаты о дискретном спектре при наличии виртуальных уровней были получены Д. Р. Яфаевым [167]; дальнейшие продвижения сделаны в работах Г. М. Жислина, С. А. Вугальтера, Х. Х. Муртазина, В. А. Садовничего и др. (см. литературу в [118]). Приведем характерный результат, ограничиваясь для простоты случаем гладких финитных потенциалов.

Теорема 7.4. Пусть $W_{kl} \in C_0^\infty$, $n=3$. Предположим, что множество Z^0 частиц можно разбить на два подмножества $Z^0=Z_1 \cup Z_2$, $Z_1 \cap Z_2=\varnothing$, так, что любая подсистема, имеющая виртуальный уровень, содержится либо в Z_1, либо в Z_2. Тогда дискретный спектр конечен. Напротив, если $N=3$ и имеются две подсистемы с виртуальным уровнем, или $N=4$ и имеются две трехчастичные подсистемы с виртуальным уровнем, то дискретный спектр бесконечен (это свойство принято называть *эффектом Ефимова*).

7.4. Уточнение физической модели. Принцип Паули, запрещающий нахождение тождественных фермионов в одинаковом состоянии, а также неразличимость тождественных бозонов в одинаковом состоянии, требует рассмотрения оператора $\mathscr{L}$ не на всех функциях из L_2, а только на тех, которые инвариантны относительно фиксированного представления в $L_2(\mathbf{R}^{nN})$ групп перестановок тождественных частиц: функции должны быть антисимметричны относительно перестановки фермионов и симметричны при перестановке бозонов. Кроме того, в естественной физической ситуации, когда $W_{kl}(z)=w_{kl}(|z|)$, часто рассматривают сужение $\mathscr{L}$ на функции, инвариантные относительно действия в $L_2(\mathbf{R}^{nN})$ группы $O(\mathbf{R}^n)$ или некоторой ее подгруппы. Наконец, учет спина частиц требует рассмотрения оператора Шрёдингера на пространстве вектор-функций. Для таких операторов спектральные свойства, в основном, аналогичны свойствам оператора (7.1), хотя доказательства (и формулировки) нередко заметно усложняются.

Более полные сведения по теории многочастичного оператора Шрёдингера см. в [118], [265], [312, т. 4], а также в [114], где рассматривается теория рассеяния для многочастичных задач.

§ 8. Исследование спектра методами теории возмущений

Один из основных приемов изучения спектра состоит в том, что исследуемый оператор A включается в семейство $A(\varepsilon)$ операторов, содержащее оператор $A_0=A(0)$ более простой структуры. Чаще всего используют линейные семейства

$$A(\varepsilon)=A_0+\varepsilon T, \tag{8.1}$$

где оператор T в каком-либо смысле подчинен оператору A_0 (если подчиненности нет, то часто говорят о сингулярном возмущении).

Ввиду того значения, которое имеет теория возмущений для исследования качественных и количественных характеристик спектра, она давно уже превратилась в самостоятельный раздел теории операторов, точнее, даже в группу разделов (качественная теория возмущений; аналитическая теория возмущений точечного спектра; абстрактная теория рассеяния, которую можно рассматривать как теорию возмущений абсолютно непрерывного спектра; теория сингулярных возмущений — перечень далеко не полон). Большая часть этих разделов развивалась в связи с запросами теории дифференциальных уравнений и квантовой механики. В предыдущих параграфах имеется много примеров применения методов теории возмущений для исследования спектральных свойств д. о. (самосопряженность — теорема 1.1; расположение существенного спектра — теорема 6.1 и т. п.). В этом параграфе мы коснемся простейших вопросов аналитической теории возмущений; подробнее о ней см. [228], [268], [312, т. 4]. Мы обсудим также «типичные свойства» спектра некоторых классов д. о.

8.1. Ряды Рэлея—Шрёдингера. Аналитическая теория возмущений исследует поведение изолированных конечнократных собственных значений оператора $A(\varepsilon)$ как функций от ε. Предполагается, что $A(\varepsilon)$ — аналитическая оператор-функция в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$. В случае операторов $A(\varepsilon)\in B(\mathfrak{H})$ аналитичность определяется стандартно, например, через разложение в сходящийся ряд по степеням ε. Для неограниченных операторов аналитичность означает, что для некоторого $\lambda_0\in\mathbf{C}$ резольвента $(A(\varepsilon)-\lambda_0 I)^{-1}$ существует (как оператор из $B(\mathfrak{H})$) при всех $\varepsilon\in\mathbf{C}$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, и представляет собой аналитическую оператор-функцию в указанном выше смысле. Отметим, что из этого определения не вытекает независимость от ε области определения $D(A(\varepsilon))$. Имеются и более общие определения аналитичности оператор-функции (см. [268]).

Пусть, в частности, A_0 — с. с. оператор, T — симметричный оператор и $D(T)\supset D(A_0)$. Тогда линейное семейство (8.1) аналитично в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$, причем для вещественных ε, в силу теоремы 1.1, оператор $A(\varepsilon)$ с. с. на области определения $D(A_0)$.

Предположим теперь, что λ_0 — изолированное собственное значение оператора A_0 кратности m, $1\leqslant m<\infty$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ существует m (не обязательно различных) однозначных аналитических функций $\lambda_j(\varepsilon)$, $\varepsilon\in\overline{1, m}$, таких, что $\lambda_j(0)=\lambda_j$ и спектр оператора $A(\varepsilon)$ вида (8.1) в окрестности точки λ_0, с учетом кратности, состоит из собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$.

Соответствующие степенные ряды для $\lambda_j(\varepsilon)$ называются *рядами Рэлея—Шрёдингера* (Р.—Ш.). Их вывод основан на контурном интегрировании резольвенты. Фиксируем малое $\delta>0$. Интеграл

$$P(\varepsilon)=-(2\pi i)^{-1}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A_0+\varepsilon T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda \qquad (8.2)$$

представляет собой, при достаточно малых ε, оператор проектирования (вообще говоря, не ортогонального) на сумму собственных подпространств оператора $A(\varepsilon)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_j(\varepsilon)$. Если λ_0 — простое собственное значение (т. е., $m=1$) и u_0 — соответствующий нормированный собственный элемент, то формула для единственной ветви $\lambda(\varepsilon)$ имеет вид:

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon^j\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\varepsilon^j\right)^{-1}, \tag{8.3}$$

где

$$a_j=\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}((T(A_0-\lambda I)^{-1}))^{j+1}u_0, u_0)\,d\lambda;$$

$$b_j=\frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}((A_0-\lambda I)^{-1}(T(A_0-\lambda I)^{-1})^j u_0, u_0)\,d\lambda.$$

В частности, $a_0=(Tu_0, u_0)$, $b_0=1$, так что в первом приближении

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon(Tu_0, u_0).$$

Выражения для следующих членов ряда (8.3) значительно сложнее.

Исходя из (8.2), можно получить также ряд для собственной функции $u(\varepsilon)$, $u(0)=u_0$. Все формулы обобщаются на случай произвольной аналитической зависимости от ε. В случае $m>1$ коэффициенты рядов для $\lambda_j(\varepsilon)$ находятся путем решения серии конечномерных задач на собственные значения (см. [268]).

Пример 8.1. Семейство операторов Шрёдингера

$$A(\varepsilon)=-\Delta+V_0+\varepsilon W,\quad V_0=\overline{V}_0,\quad W=\overline{W},$$

аналитично, например, если потенциал V_0 удовлетворяет условию (3.5), а W — условиям теоремы 2.4; имеются, конечно, и менее грубые условия аналитичности. См. в [312, т. 4] многочисленные примеры вычисления собственных значений с помощью ряда (8.3).

8.2. Типичные спектральные свойства эллиптических операторов. Техника аналитических возмущений позволяет исследовать типичные спектральные свойства регулярных эллиптических операторов. Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞, $\lambda_j(X)$ — собственные значения оператора $(-\Delta)_D$ в X. Пусть X_ε — область, полученная малой деформацией области X, т. е. X_ε есть образ X при диффеоморфизме $\Gamma_\varepsilon=I+\varepsilon J$ окрестности X в $\mathbf{R}^n$. Оператор $(-\Delta)_D$ в X_ε унитарно эквивалентен оператору A_ε в X; $A_\varepsilon=\Gamma_\varepsilon^{-1}\circ(-\Delta_D)\circ\Gamma_\varepsilon$, и к семейству A_ε применима теория аналитических возмущений п. 8.1, позволяющая получить, с точностью до сколь угодно далеких членов, асимптотику по ε собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ оператора A_ε. Исследование этой асимптотики приводит к следующему результату.

Теорема 8.1. ([293]). В пространстве областей $X\subset\mathbf{R}^n$ с гладкой границей (с естественной топологией) множество с дополнением первой категории (*типичное множество*) образуют области с простым спектром оператора $(-\Delta)_D$.

Аналогичный результат верен и для операторов Лапласа—Бельтрами.

Теорема 8.2 ([180], [340]). Пусть X — компактное многообразие, $\dim X=n$, X^k — пространство римановых метрик g на X класса C^k, $n+3\leqslant k\leqslant\infty$. Тогда множество метрик $g\in X^k$, для которых спектр оператора $-\Delta_g$ на X простой, образует в X^k типичное множество.

Аналог теоремы 8.2 имеет место и в случае, если ограничиться лишь областями $X\subset\mathbf{R}^n$, инвариантными относительно некоторой дискретной группы ортогональных преобразований $\mathbf{R}^n$. Верен, в частности, такой результат.

Теорема 8.3 [220]. Пусть $\Gamma=\{1, \sigma, \ldots, \sigma^{p-1}\}$ — представление группы $\mathbf{Z}_p$ в виде группы вращений плоскости $\mathbf{R}^2$ на углы $2\pi j/p$, $j\in\overline{0, p-1}$, $\mathcal{M}$ — пространство Г-инвариантных областей в $\mathbf{R}^2$ с C^∞-границей. Тогда типичное множество в $\mathcal{M}$ образует области, для которых все собственные значения оператора Лапласа однократны (и тогда для собственных функций u выполнено $u\circ\sigma=\exp(2\pi ij/p)u$, $j\in\overline{0, p-1}$), или двукратны (тогда $u+ +u\circ\sigma+\ldots+u\circ\sigma^{p-1}=0$).

Теорема 8.3 дополняет условный результат В. И. Арнольда [5], который, исходя из (недоказанной, но правдоподобной) гипотезы трансверсальности, показал, что такие области образуют в $\mathcal{M}$ множество с дополнением коразмерности 1. Тем не менее, уже теоремы 8.3 достаточно, чтобы оправдать рассуждение В. И. Арнольда о том, что квазиклассическое приближение (см. § 14) при наличии симметрии может давать ошибочные выражения для собственных функций и для кратностей собственных значений.

8.3. Асимптотический ряд Рэлея—Шрёдингера. С более сложной ситуацией приходится иметь дело в случае, когда точка $\varepsilon=0$ не входит в область аналитичности функции $(A(\varepsilon)-\lambda I)^{-1}$, а имеет место лишь ее непрерывность в некотором смысле в $\varepsilon=0$. В такой ситуации ряд Р.—Ш. расходится при любом $|\varepsilon|>0$. Его, однако, можно рассматривать как асимптотический ряд по степеням ε; если $(A(\varepsilon)-\lambda I)^{-1}$ сходится к $(A_0-\lambda I)^{-1}$ по норме и пересечение $D(A(\varepsilon))\cap D(A_0)$ «достаточно богато» (более точно см. в [312, теорема XII.14]), то ряд в действительности асимптотически представляет собственное значение оператора $A(\varepsilon)$, причем во многих важных примерах суммируется по Борелю к сходящемуся ряду, пригодному для вычислений. С другой стороны, если сходимость резольвенты при $\varepsilon\to0$ является лишь сильной, то ряд Р.—Ш. может и не представлять собственное значение асимптотически.

Пример 8.2. *Область с малым отверстием.* Пусть область X_ε получена выражением из $X\subset\mathbf{R}^n$ малой окрестности Y_ε фиксированной точки $w\in X$ вида $Y_\varepsilon=\{x:\varepsilon^{-1}(x-w)\in Y\subset\mathbf{R}^n\}$, $A(\varepsilon)$ —

оператор $(-\Delta)_D$ в X_ε. Рассмотрим резольвенту $A(\varepsilon)$ как оператор в X. Тогда для $n \geqslant 4$ имеет место сходимость резольвент по норме при $\varepsilon \to +0$ и ряд Р.—Ш.— асимптотический. Если же $n=2$, 3, то сходимость лишь сильная (то же имеет место в любой размерности, если на ∂X_ε ставить граничные условия N). В этом случае (см. [102], [302]) найдено несколько первых членов разложения собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$, причем при $n=3$ они степенные, но отличаются от соответствующих членов ряда Р.—Ш., а при $n=2$ — они содержат степени $\log \varepsilon$.

Пример 8.3. *Четный ангармонический осциллятор* $A(\varepsilon) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + \varepsilon x^{2m}$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$. Резольвента сходится по норме; ряд Р.—Ш. асимптотический и суммируется к собственным значениям оператора $A(\varepsilon)$ по Борелю (см. [311], [312, т. 4].

8.4. Сингулярные возмущения. Случаи, когда ряд Р.—Ш. неприменим даже асимптотически, характерен для теории сингулярных возмущений. Приведем характерный пример.

Пример 8.4. *Оператор Шрёдингера с малым потенциалом.* Пусть $V>0$ и $V \to 0$ на бесконечности достаточно быстро, $A(\varepsilon) = -\Delta - \varepsilon V$, $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \to 0$ собственное значение $\lambda_j(\varepsilon)$ растет, приближается к нулю и при некотором $\varepsilon = \varepsilon_j$ поглощается существенным спектром. Таким образом, отсутствует «невозмущенное собственное значение» $\lambda_j(\varepsilon_j)$, а вместе с ним — и ряд Р.—Ш. Вблизи ε_j собственное значение ведет себя как аналитическая функция с алгебраической точкой ветвления. Отвечающие $\varepsilon < \varepsilon_j$ невещественные собственные значения $\lambda_j(\varepsilon)$ интерпретируются как полюса $\lambda = \zeta^2$ продолжения резольвенты $(A(\varepsilon) - \zeta^2 I)^{-1}$, $\zeta^2 = \lambda$, по ζ в область $\operatorname{Re} \zeta < 0$; их принято называть *резонансами*. См. по этому поводу [311], [312, т. 4].

8.5. Квазиклассические асимптотики. Пусть $A(\varepsilon) = A(x, \varepsilon D_x)$ — семейство с. с. д. о. в $\mathbf{R}^n$ с гладкими коэффициентами. При $\varepsilon = 0$ $A(0)$ — оператор умножения на функцию $V(x) = A(x, 0)$, его спектр совпадает с областью значений $V(x)$ и, как правило,— чисто непрерывный. Предположим, что на интервале $\Delta \subset \sigma(A(0))$ спектр $A(\varepsilon)$ дискретен при $\varepsilon > 0$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ собственные значения $A(\varepsilon)$ на Δ сгущаются таким образом, что каждая точка $\lambda \in \Delta$ является предельной точкой некоторой «ветви» собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ операторов $A(\varepsilon)$. Здесь возникают две задачи сингулярной теории возмущений, которые принято относить к теории *квазиклассических асимптотик*.

Задача 1. Для интервала $\Delta_0 \subset \Delta$ найти асимптотику при $\varepsilon \to +0$ функции $N(\Delta_0; A(\varepsilon))$ (см. (1.11)), а также спектрального проектора $E^{A(\varepsilon)}(\Delta_0)$.

Задача 2. Найти асимптотику при $\varepsilon \to 0$ индивидуальной непрерывной ветви собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ и соответствующих собственных функций.

Термин «квазиклассический» («semiclassical») оправдывается примерами квантовомеханического происхождения, где в качестве ε выступает постоянная Планка.

Результаты в задаче 1 во многих отношениях сходны с результатами об асимптотике для фиксированного д. о. собственных значений и собственных функций по их номеру. Такие результаты и соответствующие методы изложены в § 9—15.

Задача 2, с другой стороны, может быть с помощью масштабирования сведена к возмущениям, сходным с рассмотренными в п. 8.3. Мы ограничимся наиболее исследованным (и, пожалуй, наиболее важным) примером оператора Шрёдингера

$$A(\varepsilon)=-\varepsilon^2\Delta+V(x),\quad V\in C^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{8.4}$$

Пример 8.5. *Потенциальная яма.* Пусть $V(x)\geqslant 0$ имеет при $x=0$ невырожденный единственный минимум, $V(0)=0$, и $\liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x)>0$. Спектр $A(\varepsilon)$ вблизи нуля дискретен. Введем *преобразование масштабирования* $U(\varepsilon): u(x)\mapsto u(\varepsilon x)$. Спектр $A(\varepsilon)$ лишь множителем ε^2 отличается от спектра оператора $B(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}U(\varepsilon)A(\varepsilon)U^{-1}(\varepsilon)=-\Delta+V_\varepsilon(x)$, где $V_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-2}V(\varepsilon x)$. При $\varepsilon\to 0$ аналитическое семейство $B(\varepsilon)$ сильно сходится к оператору $B(0)=-\Delta+V^0(x)$, где $V^0(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}V(\varepsilon x)$ — квадратичная часть $V(x)$ в нуле. Оператор $B(0)$ представляет собой многомерный гармонический осциллятор (см. пример 4.5′). С помощью ряда Р.—Ш., таким образом, находится полное асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций $A(\varepsilon)$. При этом оказывается, что собственные функции $A(\varepsilon)$ локализованы в потенциальной яме: если $u_\varepsilon(x)$ — собственная функция $A(\varepsilon)$, то для любого $x\neq 0$ $u_\varepsilon(x)=o(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon\to 0$ для любого N (более тонкий анализ дает даже экспоненциальное убывание u_ε).

Пример 8.6. *Двойная яма.* Пусть теперь потенциал $V(x)\geqslant 0$ имеет два невырожденных минимума в точках $x=0$ и $x=a$, $V(0)=V(a)=0$, причем, как и в примере 8.5, $\liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x)>0$. Здесь с помощью преобразования растяжения с центром в точке a получается еще одно семейство операторов $C(\varepsilon)$, которое при $\varepsilon\to 0$ сильно сходится к оператору $C(0)=-\Delta+V^a(x)$, где $V^a(x)$ — квадратичная часть $V(x)$ в точке a. Ряд Р.—Ш. дает асимптотику серии собственных значений $A(\varepsilon)$, отвечающей потенциальной яме в точке a. Если операторы $B(0)$ (описанный в примере 8.5) и $C(0)$ не имеют общих собственных значений, то собственные функции для $A(\varepsilon)$ оказываются локализованными вблизи точек $x=0$ или $x=a$, и их асимптотика дается рядами Р.—Ш. для семейств $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$. Иначе обстоит дело, если спектры $B(0)$ и $C(0)$ пересекаются. Пусть, например, потенциал симметричен, $V(x)=V(a-x)$. Тогда ряды Р.—Ш. для низших собственных значений $C(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ совпадают во всех степенных членах, что дает асимптотически двукратное собственное значение $A(\varepsilon)$. Имеется, однако, экспоненциально малое расщепление. Оно связано с тем, что вместо двух локализованных в одной из ям собственных функций имеются симметричная и антисимметричная собственные функции $u^{\pm}(x, \varepsilon)$ с соответствующими собственными значениями $\lambda^{\pm}(\varepsilon)$. Функции $u^{\pm}$ локализованы в объединении ям. Имеет место асимптотика $\log(\lambda^{-}(\varepsilon)-\lambda^{+}(\varepsilon)) \sim -\varepsilon^{-1}d(0, a)$, где $d(0, a)$ — расстояние между точками 0 и a в метрике $V(x)dx^2$.

Этот результат допускает следующую интерпретацию с помощью уравнения Шрёдингера $\partial u/\partial t = iA(\varepsilon)u$. Зададим начальное условие $u(0, x; \varepsilon) = u^{+}(x, \varepsilon) + u^{-}(x, \varepsilon)$; это отвечает частице, находящейся при $t=0$ в яме вблизи $x=0$. Решение имеет вид $u(t, x; \varepsilon) = \exp(it\lambda^{+}(\varepsilon))u^{+} + \exp(it\lambda^{-}(\varepsilon))u^{-}$, и через время t порядка $\exp(\varepsilon^{-1}d(0, a))$ решение будет равно $u(t, x; \varepsilon) \doteq u^{+} - u^{-}$, т. е. частица переместится в яму $x=a$ под потенциальным барьером, продемонстрирован *туннельный эффект*. Через такое же время частица вернется в яму $x=0$ и т. д. Такие частицы принято называть *инстантонами*.

Подробно об этих задачах см. [207], [247], [325].

К затронутым в этом параграфе проблемам примыкают также важные для приложений теория сингулярных возмущений краевых задач [44], [120], [311] и теория осреднения задач на собственные значения [301], [317].

§ 9. Асимптотика спектра. I. Предварительные замечания

9.1. Два вида асимптотических формул. В «непатологических» ситуациях собственные значения с. с. д. о. имеют правильное асимптотическое поведение. Его можно описывать либо в терминах самих собственных значений, либо в терминах их функций распределения (1.12), (1.16). В полуограниченном случае соответствующие асимптотические формулы записываются в виде

$$\lambda_j(A) \sim \Psi(j), \quad j \to \infty; \tag{9.1}$$

$$N(\lambda; A) \sim \Phi(\lambda), \quad \lambda \to \infty, \tag{9.2}$$

где Φ, Ψ — некоторые взаимно обратные возрастающие функции на $\mathbf{R}_+$, как правило, — достаточно регулярные. В широких условиях формулы (9.1), (9.2) равносильны. Так будет, например, для степенных и логарифмически-степенных асимптотик: $\Phi(\lambda) = a\lambda^{\alpha}$ (тогда $\Psi(j) = (j/a)^{1/\alpha}$), $\Phi(\lambda) = a\lambda^{\alpha}\log\lambda$ (тогда $\Psi(j) \sim (\alpha j/a \log j)^{1/\alpha}$). Однако, скажем, соотношение $\lambda_j(A) \sim Ce^{\lambda}$ значительно сильнее, чем вытекающее из него соотношение $N(\lambda; A) \sim \log\lambda - \log C \sim \log\lambda$, хотя бы потому, что исчезает информация о постоянной C.

Иногда возможно выделение следующих членов асимптотики спектра. Так, для оператора Штурма—Лиувилля с гладкими коэффициентами на конечном промежутке собственные значения допускают полное асимптотическое разложение по степеням j^{-1} (см. [121]). Такие разложения уже не переводятся на язык функции $N(\lambda; A)$: в точках $\lambda\in\sigma_p(A)$ она имеет скачки, и потому для нее члены вида $C\lambda^q$, $q<0$, в асимптотическом разложении заведомо отсутствуют.

Для д. о. в частных производных разложений собственных значений в асимптотические ряды по степеням порядкового номера, вообще говоря, не существует. Асимптотика спектра для них как правило пишется в форме (9.2). Часто формулу вида (9.2) удается уточнить, указывая квалифицированную оценку остатка, либо выделяя второй член асимптотики.

9.2. Формулы для главного члена асимптотики. Приведем наиболее употребительные выражения для главного члена асимптотики спектра д. о.

Подчеркнем, что здесь мы ограничиваемся обсуждением вида формул и, как правило, не приводим точных условий, при которых доказана их справедливость. Такие условия частично указаны в последующих разделах статьи, частично — в оригинальных работах, к которым мы отсылаем читателя.

Начнем со случая операторов в областях $X\subseteq\mathbf{R}^n$. Часто асимптотику их спектра удобно выражать через *вейлевский символ* $A_W(x, \xi)$. На функциях $u\in C_0^\infty(X)$ оператор A представляется через вейлевский символ формулой

$$(Au)(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\xi\cdot(x-y)}A_W\left(\frac{x+y}{2},\ \xi\right)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Имеются формулы пересчета, связывающие $A_W(x, \xi)$ и полный символ $A(x, \xi)$ (см. [162]). Для д. о. с постоянными коэффициентами $A_W(x, \xi)=A(x, \xi)$. Это равенство сохраняется и тогда, когда коэффициент при u непостоянен, в частности, для оператора Шрёдингера (2.18) и для оператора (3.8). Важное свойство вейлевского символа состоит в том, что д. о. A ф. с. с. тогда и только тогда, когда значения $A_W(x, \xi)$ — вещественные числа (для д. о. на вектор-функциях — эрмитовы матрицы). Если символ A_W полуограничен снизу, то (при некоторых дополнительных предположениях) оператор A также полуограничен на $C_0^\infty(X)$.

Итак, пусть A — скалярный полуограниченный с. с. д. о. в области $X\subset\mathbf{R}^n$, A_W — его вейлевский символ. В широком классе случаев справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda; A)\sim(2\pi)^{-n}\mathrm{mes}_{2n}\{x, \xi)\in X\times\mathbf{R}^n : A_W(x, \xi)<\lambda\},\ \lambda\to\infty. \tag{9.3}$$

Для д. о. с постоянными коэффициентами формула (9.3) дает:

$$N(\lambda; A)\sim(2\pi)^{-n}\mathrm{mes}_n X V_A(\lambda),\ \lambda\to+\infty; \tag{9.4}$$

$$V_A(\lambda)=\mathrm{mes}_n\{\xi\in\mathbf{R}^n : A(\xi)<\lambda\}. \qquad (9.5)$$

Смысл асимптотики (9.4)—(9.5) проще всего уяснить на примере операторов с периодическими граничными условиями или, что равносильно, операторов на торе $\mathbf{T}^n$ (см. пример 4.3). В самом деле, тогда

$$N(\lambda; A)=\mathrm{card}\{k\in\mathbf{Z}^n : A(k)<\lambda\},$$

и формула (9.4)—(9.5) означает, что при больших λ количество целых точек в области $A(\xi)<\lambda$ асимптотически равно ее объему. Это действительно верно, если при $|\xi|\to\infty$ полином $A(\xi)$ растет достаточно регулярно; однако, например, для полинома в $\mathbf{R}^2$ $A(\xi)=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_1^4\xi_2^4$ это геометрическое свойство не выполнено, и, следовательно, формула (9.4)—(9.5) не верна.

Для оператора $(-\Delta)^r$ при регулярных граничных условиях, в соответствии с (9.4), (9.5),

$$N(\lambda;\ (-\Delta)^r)\sim(2\pi)^{-n}v_n\lambda^{n/2r}\mathrm{mes}_n X; \qquad (9.6)$$

здесь и в дальнейшем v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$. Для $r=1$ эта формула (при $n=2, 3$ и при граничных условиях D, N) впервые была установлена Г. Вейлем [349]. В связи с этим и любые д. о. (а также п. д. о.), для которых верна асимптотика (9.3), часто называют *«операторами с вейлевской асимптотикой спектра»*.

Вейлевскую асимптотику имеют, в частности, (В. Н. Туловский [147]) операторы $\mathscr{L}_D(X)$ из примера 3.5 при условии, что $X\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное множество, $\mathrm{mes}_n(\partial X)=0$ и, кроме того, $S_{\mathscr{L}}(\lambda)=o(V_{\mathscr{L}}(\lambda))$, $\lambda\to\infty$; здесь $S_{\mathscr{L}}(\lambda)$ — $(n-1)$-мерная площадь поверхности $\{\xi\in\mathbf{R}^n:\mathscr{L}(\xi)=\lambda\}$. Этот класс включает, например, любые гипоэллиптические д. о. с постоянными коэффициентами.

Для оператора (3.8) формула (9.3) дает:

$$N(\lambda; A)\sim(2\pi)^{-n}v_n\int(\lambda-V(x))_+^{n/2r}\,dx. \qquad (9.7)$$

В частности, при $r=1$, т. е. для оператора Шрёдингера,

$$N(\lambda;\ \mathrm{A})\sim(2\pi)^{-n}v_n\int(\lambda-V(x))_+^{n/2}\,dx. \qquad (9.8)$$

Формулы (9.7), (9.8) действительно справедливы при широких условиях на потенциал (подробнее см. § 11).

Пусть теперь A — с. с. д. о. в пространстве вектор-функций. Анализ примера 4.4 приводит к заключению, что в «регулярных ситуациях» асимптотика спектра оператора A должна определяться суммой вкладов вида (9.3) от собственных значений матрицы $A_W(x, \xi)$. Получающуюся формулу удобно записать в виде

$$N(\lambda;\ A)\sim(2\pi)^{-n}\int\limits_{X\times\mathbf{R}^n}N(\lambda;\ A_W(x,\ \xi))\,dx\,d\xi; \qquad (9.9)$$

здесь $N(\lambda; A_W(x, \xi))$ — функция распределения собственных значений эрмитовой матрицы $A_W(x, \xi)$. Асимптотику (9.9) также будем называть *вейлевской*.

В широких условиях формула (9.9) остается справедливой и для д. о. в пространствах вектор-функций бесконечной размерности. Как правило, в этом случае говорят о *д. о. с операторными коэффициентами* или об *операторнозначных д. о.*. Важным частным случаем таких д. о. являются *оператор Шрёдингера с операторным потенциалом.*

Пусть $\mathscr{H}$ — вспомогательное гильбертово пространство, $V(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — полуограниченный снизу с. с. оператор в $\mathscr{H}$ с дискретным спектром, зависящий от x «достаточно регулярно», и пусть $v(x) = QF(V(x))$. В пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\mathbf{R}^n, \mathscr{H})$ форма

$$a[u] = \int_{\mathbf{R}^n} (\|\nabla u\|^2_{\mathscr{H}} + v(x)[u])\, dx$$

полуограничена и замкнута на естественной области определения. Оператор $A = Op(a)$ принимают за реализацию д. в. $-\Delta + V(x)$. Эту схему можно распространить и на случай, когда пространство $\mathscr{H}$ само зависит от x. Для оператора A обсуждаемого вида формула (9.9) оправдана в довольно общей постановке ([84], [313]). Она дает

$$N(\lambda;\ A) \sim (2\pi)^{-n} v_n \sum_j \int_{\mathbf{R}^n} (\lambda - \lambda_j(x))_+^{n/2}\, dx; \tag{9.10}$$

здесь $\{\lambda_j(x)\}$ — собственные значения оператора $V(x)$ (с учетом кратности).

9.3. Вейлевская асимптотика для регулярных эллиптических операторов. Для регулярных эллиптических операторов поведение при $|\xi| \to \infty$ вейлевского символа $A_W(x, \xi)$ и главного символа $A^0(x, \xi)$ асимптотически одинаково, что позволяет заменить в (9.3), (9.9) A_W на A^0. Так, формула, эквивалентная (9.9), имеет вид

$$N(\lambda;\ A) \sim (2\pi)^{-n} \int_{X \times \mathbf{R}^n} N(\lambda;\ A^0(x,\ \xi))\, dx\, d\xi. \tag{9.11}$$

Замена переменной $\xi \mapsto \lambda^{1/m}\xi$, $m = \operatorname{ord} A$, выявляет (с учетом однородности главного символа) степенной характер асимптотики. Формулу (9.11) часто записывают в «локализованном» виде:

$$N(\lambda;\ A) \sim a_0 \lambda^{n/m},\quad m = \operatorname{ord} A; \tag{9.12}$$

$$a_0 = (2\pi)^{-n} \int_X \omega_0(x)\, dx, \tag{9.13}$$

$$\omega_0(x) = \int_{\mathbf{R}^n} N(1;\ A^0(x,\ \xi))\, d\xi. \tag{9.14}$$

В частности, для операторов на скалярных функциях

$$\omega_0(x)=\mathrm{mes}_n\{\xi\in\mathbf{R}^n : A^0(x,\xi)<1\}. \tag{9.15}$$

Для операторов 2-го порядка вида (2.8) с вещественными коэффициентами это дает:

$$N(\lambda;\ A)\sim(2\pi)^{-n}\, v_n\lambda^{n/2}\int\limits_X \frac{dx}{\sqrt{\det\{a_{ij}(x)\}}}. \tag{9.16}$$

Формула (9.16) была впервые установлена Карлеманом [193].

Формула (9.11) модифицируется и на случай операторов на многообразиях. В этом отношении она предпочтительнее (для эллиптических д. о.) чем формула (9.9), поскольку для операторов на многообразиях вейлевский символ не определен инвариантно. Итак, пусть A — с. с. эллиптический полуограниченный оператор на сечениях конечномерного эрмитова расслоения $\mathscr{E}$ над компактным многообразием X (с краем или без края), на котором фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu$. Аналог формулы (9.11) таков:

$$N(\lambda;\ A)\sim(2\pi)^{-n}\int\limits_{T^*X} N(\lambda;\ A^0(z))\,dz. \tag{9.17}$$

Здесь dz — элемент симплектического объема; в локальных координатах $z=(x,\xi)$, $dz=dx\,d\xi$.

Мы видим, что главный член асимптотики не зависит от выбора плотности $d\mu$. Кроме того, приведенные формулы показывают, что в регулярной ситуации он не зависит от граничных условий на ∂X. Наподобие формулы (9.11), формулу (9.17) можно записать в виде (9.12)—(9.13), где

$$\omega_0(x)=\int\limits_{T^*_xX} N(1;\ A^0(x,\ \xi))\,d\xi. \tag{9.14'}$$

Вычисление $\omega_0(x)$ проводится в любой локальной системе координат. Из правил преобразования главного символа при замене переменных следует, что $\omega_0(x)dx$ есть плотность, так что выражение (9.13) для a_0 имеет инвариантный смысл.

Если X — риманово многобразие, $\mathscr{E}$ — линейное тривиальное расслоение и A — оператор Лапласа—Бельтрами на X, то из (9.12)—(9.14′) находим, что

$$N(\lambda;\ A)\sim(2\pi)^{-n}v_n\lambda^{n/2}\,\mathrm{vol}\,X,$$

где $\mathrm{vol}\,X$ — риманов объем многообразия. Это, очевидно, согласуется с формулой (9.16).

Формулы типа (9.9), (9.11) имеют место и для широкого класса неполуограниченных операторов:

$$N_\pm(\lambda;\ A)\sim(2\pi)^{-n}\int\limits_{X\times\mathbf{R}^n} N_\pm(\lambda;\ A_W(x,\ \xi))\,dx\,d\xi, \tag{9.9$\pm$}$$

$$N_\pm(\lambda;\,A) \sim (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^*X} N_\pm(\lambda;\,A^0(z))\,dz, \qquad (9.17_\pm)$$

и т. п.

Наряду с асимптотикой спектра исследуется асимптотическое поведение спектральной функции (см. п. 1.11) дифференциальных операторов; для операторов на вектор-функциях речь идет обычно о ее матричном следе. Асимптотика спектральной функции описывается с помощью функции $\omega_0(x)$, определенной в зависимости от обстановки — формулой (9.14), (9.15), либо (9.14′). Так, для полуограниченного эллиптического оператора A, действующего на скалярные функции в области $X \subset \mathbf{R}^n$,

$$e^A(\lambda;\,x,\,x) \sim (2\pi)^{-n}\,\omega_0(x)\,\lambda^{n/m}, \qquad m = \operatorname{ord} A, \qquad (9.18)$$

где $\omega_0(x)$ определено в (9.15). В частности, для операторов 2-го порядка с вещественными коэффициентами

$$e^A(\lambda;\,x,\,x) \sim (2\pi)^{-n} v_n (\det(a_{ij}(x))\})^{-1/2} \lambda^{n/2};$$

эта формула, установленная Карлеманом [193], была исторически первым результатом об асимптотике спектральной функции для операторов в частных производных. Аналог формулы (9.18) справедлив и для систем; в ее левой части стоит $\operatorname{tr} e^A(\lambda;\,x,x)$, а функция $\omega_0(x)$ в правой части теперь дается равенством (9.14). Для операторов на многообразии X с фиксированной гладкой плотностью $d\mu$

$$\operatorname{tr} e^A(\lambda;\,x,\,x) \sim (2\pi)^{-n}\,\omega_0(x)\,dx/d\mu\,\lambda^{n/m}, \qquad (9.19)$$

где $\omega_0(x)$ определено в (9.14′). Напомним, что $\omega_0(x)dx$ есть плотность на X, так что $\omega_0(x)dx/d\mu$ — функция на X. В соответствии с (1.18) имеет место равенство

$$N(\lambda;\,A) = \int\limits_X \operatorname{tr} e^A(\lambda;\,x,\,x)\,d\mu;$$

таким образом, формулу спектральной асимптотики (9.12) можно, в случае компактных многообразий без края, получать интегрированием соответствующей формулы для спектральной функции. Если же $\partial X \neq \varnothing$, то асимптотика типа (9.18) не является равномерной вплоть до ∂X; однако и здесь удается вывести (9.12), интегрируя асимптотику $\operatorname{tr} e^A(\lambda;\,x,x)$ по внутренней подобласти $X' \subset X$, а в $X \setminus X'$ пользуясь равномерной оценкой (5.3). Получение формул асимптотики спектральной функции, равномерно пригодных вблизи ∂X (а также при $x \neq y$), требует привлечения более продвинутого аппарата, а сами формулы имеют значительно более сложный вид — см. [9], [260].

Отметим еще, что формулы (9.18), (9.19) и т. п. имеют локальный характер и справедливы также для неограниченных X; таким образом, они выполнены и тогда, когда спектр оператора недискретен.

9.4. Уточнение асимптотических формул. В этом пункте, если не сделано оговорок, граница области и коэффициенты в уравнении и граничных условиях предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Для с. с. регулярных эллиптических операторов в широких предположениях установлена следующая оценка *остаточного члена* в формулах спектральной асимптотики:

$$R(\lambda;\ A) \overset{\text{def}}{=} N(\lambda;\ A) - a_0\lambda^{n/m} = O(\lambda^{(n-1)/m}). \qquad (9.20)$$

Для различных, последовательно усложняющихся классов операторов оценка (9.20) получена в работах Хёрмандера [250], Сили [320], [321], В. Я. Иврия [71], [260] и Д. Г. Васильева [37]. К настоящему времени она оправдана для любых эллиптических операторов на компактных многообразиях без края, а в случае одного уравнения — также для операторов краевых задач. Для систем уравнений рассмотренный до сих пор класс краевых задач не является исчерпывающим. Тем не менее, нет оснований сомневаться в справедливости оценки (9.20) для любого регулярного эллиптического оператора.

Анализ примеров 4.7, 4.8 показывает, что в общем случае оценки (9.20) неулучшаема. В самом деле, для оператора Лапласа на сфере S^n собственные значения $\lambda_k \sim k^2$ имеют кратность порядка $O(k^{n-1}) = O(\lambda_k^{(n-1)/2})$ (оценка — точная). Отсюда, очевидно, вытекает неулучшаемость оценки (9.20) для этого оператора. Аналогично обстоит дело для операторов $-\Delta_D$, $-\Delta_N$ на полусфере.

Крупным достижением последних 10—15 лет явился анализ «точных» спектральных асимптотик. При некоторых условиях геометрического характера такие асимптотики имеют вид

$$N(\lambda^m;\ A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}),\quad m = \operatorname{ord} A \qquad (9.21)$$

(с функцией $N(\lambda^m;\ A)$ здесь более удобно иметь дело, нежели с $N(\lambda; A)$). Сходные формулы имеются и для спектральной функции. Первые общие результаты в этом направлении были получены Дейстермаатом и Гийемином [221] для «скалярных» п. д. о. на компактном многообразии без края. Пусть, в частности, X — риманово и A — оператор Лапласа—Бельтрами. На косферическом расслоении S^*X (на римановом многообразии его можно отождествить с расслоением единичных сфер) рассмотрим *геодезический поток* Φ_t, сдвигающий каждую точку $z = (x, \xi) \in S^*X$ на расстояние t по выходящей из этой точки геодезической. Точка $z_0 \in S^*X$ называется *периодической*, если $\Phi_T z_0 = z_0$ при некотором $T \neq 0$. Периодическая точка z_0 называется *абсолютно периодической*, если величина $\operatorname{dist}(\Phi_T z, z)$ имеет порядок малости $O((\operatorname{dist}(z, z_0))^\infty)$. Результат Дейстермаата и Гийемина состоит в том, что, если множество абсолютно периодических точек имеет нулевую $(2n-1)$-мерную меру, то справедлива формула (9.21) (при $m=2$), причем $a_1 = 0$.

Если абсолютно периодических точек «много», то асимптотика (9.21), вообще говоря, нарушается, в этом можно убедиться на примере оператора Лапласа на сфере, когда собственные значения имеют аномально высокую кратность.

Для краевых задач основополагающие результаты получены В. Я. Иврием [68], [260], оправдавшим формулу (9.21) для операторов порядка $m=2$ (см. пример 2.6). Для этих операторов

$$a_1 = \pm 1/4(2\pi)^{-(n-1)} v_{n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(\partial X), \tag{9.22}$$

где $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial X)$ — $(n-1)$-мерный объем границы относительно той римановой метрики на X, для которой A является оператором Лапласа—Бельтрами. Знак «—» в (9.22) соответствует задаче Дирихле, знак «+» — задаче Неймана либо третьей краевой задаче. Для оператора Лапласа на плоскости предположение о справедливости асимптотики (9.21)—(9.22) было высказано Г. Вейлем [350] еще в 1912 г. и с тех пор известно как *гипотеза Вейля*. В связи с этим, точную асимптотику вида (9.21) и в общем случае принято называть *вейлевской двучленной асимптотикой*. (Предупреждаем читателя о возможности терминологического смешения: в п. 9.2, 9.3 речь шла об одночленных вейлевских асимптотиках!)

Геометрическое условие, гарантирующее выполнение асимптотики (9.21)—(9.22), аналогично условию Дейстермаата—Гийемина, лишь вместо геодезического потока надо рассматривать биллиардный поток, с отражениями от границы по обычному закону. В [68] условие накладывалось на все периодические, а не только абсолютно периодические траектории; впоследствии было выяснено [38], что оба условия эквивалентны: множество периодических точек, не являющихся абсолютно периодическими, всегда имеет нулевую $(2n-1)$-мерную меру Лебега.

Позднее В. Я. Иврий [69], [70], [261] и Д. Г. Васильев [36], [37] значительно расширили круг задач, для которых доказана справедливость асимптотики вида (9.21). Они показали также, что оценки (9.20) и асимптотики (9.21) сохраняются, если допустить стандартные особенности границы (такие как ребра, конические точки и т. п.). В работах Т. Е. Гуреева и Ю. Г. Сафарова [56]; Ю. Г. Сафарова [139] были исследованы точные асимптотики отличного от (9.21) типа. Подробнее этот материал изложен в § 13, 14.

Для д. о. в $\mathbf{R}^n$ или во внешности ограниченной области в $\mathbf{R}^n$ с помощью метода гиперболического уравнеиия иногда удается получить полное асимптотическое разложение спектральной функции $e^A(\lambda; x, x)$. Это связано с тем, что при определенных дополнительных условиях функция $U(t; x, y)$ — *ядро Шварца* эволюционного оператора $\exp(it\sqrt{A})$ — достаточно быстро убывает по t и вместо соответствующей тауберовой теоремы (см. п. 13.1) можно прямо использовать формулу обращения преобразования Фурье. Результаты такого рода содержатся в статьях В. С. Буслаева, Б. Р. Вайнберга, Г. Попова, М. А. Шубина и др.; ссылки на них можно найти, например, в обзорной статье [35]; см. в особенности [33], [34], [181].

Ключевую роль при доказательстве убывания $U(t; x, y)$ играет следующее *условие неловушечности*: требуется, чтобы для каждого R существовало $T_R>0$ такое, что любая геодезическая с началом в точке (x, ξ), $|x|\leqslant R$, при $|t|>T_R$ лежала вне множества $\{|x|\leqslant R\}$. Для операторов во внешности ограниченной области вместо геодезических надо рассматривать биллиардные траектории.

9.5. Спектр, сгущающийся к точке 0. Имеется широкий круг задач, в которых спектр накапливается не к ∞, а к точке $\lambda=0$ (например, п. д. о. порядка $-\alpha<0$, в том числе интегральные операторы с полярным ядром; оператор Шрёдингера с потенциалом $V(x)<0$, $V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, — здесь речь идет об асимптотике отрицательного спектра; уравнение (5.6) и его обобщения). Для таких операторов исследуется поведение функций распределения (1.19), (1.20) при $\lambda\to 0$. Для них также говорят о «вейлевской асимптотике», но смысл, который в это вкладывается, зависит от вида оператора. Так, для оператора Шрёдингера с отрицательным потенциалом, очевидно, при $\lambda<0$ будет $n_-(-\lambda; A)=N(\lambda; A)$; здесь, при некоторых условиях на $V(x)$ (см. ниже теорему 11.3), сохраняется формула (9.8), с тем отличием, что теперь $\lambda\to -0$. (Например, спектр оператора из примера 6.1 согласуется с этой асимптотикой; см. [135], [337].)

Пусть теперь A — классический с. с. п. д. о. порядка $-\alpha<0$, действующий на сечениях эрмитова векторного расслоения $\mathscr{E}$ над компактным многообразием X с краем или без края; как всегда, считается, что на X фиксирована гладкая положительная плотность $d\mu$. Пусть $A^0(z)$, $z\in T^*X$, — главный символ п. д. о. A. Формула, аналогичная $(9.17_\pm)$, для этого случая имеет вид

$$n_\pm(\lambda; A)\sim(2\pi)^{-n}\int\limits_{T^*X} n_\pm(\lambda; A^0(z))\,dz=$$

$$=(2\pi)^{-n}\lambda^{-n/\alpha}\int\limits_{T^*X} n_\pm(1; A^0(z))\,dz. \qquad (9.23_\pm)$$

Эта формула (а также ее обобщение на случай «анизотропно-однородных» символов) получена в [25].

Формулы вида $(9.23_\pm)$ сохраняются также для многих задач вида $Bu=\lambda Au$ с эллиптическим оператором A. Функция $n_\pm(\cdot)$ под знаком интеграла соответствует конечномерной задаче $B^0(z)f=\lambda A^0(z)f$. В частности, для спектра взвешенного полигармонического оператора, т. е. для уравнения

$$pu=\lambda((-\Delta)^r u+\varepsilon u) \tag{9.24}$$

в условиях примеров 3.9, 3.10, 3.12 справедлива асимптотика

$$n_\pm(\lambda)\sim v_n(2\pi)^{-n}\lambda^{-n/2r}\int\limits_X p_\pm^{n/2r}\,dx. \tag{9.25}$$

Подробнее об этом материале см. [21], [22].

9.6. Квазиклассические асимптотики. Коротко обсудим результаты по задаче 1 п. 8.5. Пусть $A(\varepsilon)=A(x, \varepsilon D)$ — семейство с. с. д. о. в области $X\subset\mathbf{R}^n$, имеющих дискретный спектр в интервале $\delta\subset\mathbf{R}$. Эвристическая формула (9.3), после несложных преобразований дает:

$$N(\delta, A(\varepsilon))\sim(2\pi\varepsilon)^{-n}\mathrm{mes}_{2n}\{(x,\xi): A_W(x,\xi)\in\delta\},\ \varepsilon\to 0. \tag{9.3'}$$

Эта формула оправдана для многих классов задач, в частности — для д. о. в $\mathbf{R}^n$, для которых $A_W(x,\xi)\to\infty$ при $|x|+|\xi|\to\infty$ (при условиях определенной регулярности символа), см. [245], [246], [339]. Вид формулы наводит на мысль, что для ее справедливости существенно поведение коэффициентов д. о. лишь на множестве $A_W^{-1}(\delta)$ (и, возможно, в его малой окрестности). Это подтверждается, однако, лишь для отдельных классов операторов. В частности, для оператора Шрёдингера в $\mathbf{R}^n$: $A(\varepsilon)=-\varepsilon^2\Delta+V(x)$ формула (9.3′), принимающая при $\delta=(-\infty, \lambda)$ вид

$$N(\lambda; A(\varepsilon))\sim(2\pi\varepsilon)^{-n}v_n\int(\lambda-V(x))_+^{n/2}dx,\quad \varepsilon\to 0,$$

при $n\geqslant 3$ верна всегда, когда конечен интеграл в правой части, вне зависимости от поведения V там, где $V(x)>\lambda$ (см. [22], [131]). При дополнительных условиях на оператор в асимптотических формулах вида (9.3′) найдены точные оценки остатка и выделены младшие члены; см. [245], [246], [338].

9.7. Обзор методов получения асимптотических формул. Приемы, используемые для вычисления асимптотики спектра, принято разделять на две группы: «вариационные методы», восходящие к работам Г. Вейля [349] и Куранта [208] и «тауберовы методы», восходящие к работе Карлемана [193]. Промежуточное положение занимает появившийся сравнительно недавно «метод приближенного спектрального проектора» (п. с. п.), предложенный В. Н. Туловским и М. А. Шубиным [148]. Здесь мы вкратце охарактеризуем эти приемы. Подробнее о них и о полученных с их помощью результатах см. §§ 11—15.

Вариационная техника, применимая в полуограниченном случае, основана на последовательном использовании формул типа (1.13) для $N(\lambda; A)$. При подходящем выборе подпространств F на основании этих формул удается получить для $N(\lambda; A)$ двусторонние оценки, асимптотически сближающиеся при $\lambda\to\infty$. Выбор F, как правило, связан с разбиением области на кубы и с «замораживанием коэффициентов» в каждом кубе. Стоит отметить, что в том или ином виде идея локализации присутствует в каждом из методов вычисления асимптотики спектра.

Преимущество вариационного метода — в его элементарности. Он не столь чувствителен, как другие методы, к гладкости коэффициентов, границы области и т. п. Для многих типов операторов спектральная асимптотика была первоначально получена именно вариационными средствами (оператор Лапласа; система теории упругости; оператор Шрёдингера; эллиптические операторы с вырождением эллиптичности; оператор Кона—Лапласа и т. д.). С другой стороны, он (по крайней мере, к настоящему времени) не дает точных оценок остатка типа (9.20) и тем более — точных асимптотик типа (9.21). Подробнее о вариационном методе см. § 11.

Перейдем к характеристике тауберовых методов. Пусть A — с. с. полуограниченный оператор с дискретным спектром в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $\{\lambda_j\}$, $\{e_j\}$, $j\in\mathbf{N}$, — его собственные значения и нормированные собственные элементы. Пусть φ — ограниченная борелевская функция на $\mathbf{R}$; образуем оператор $\varphi(A)$ (см. (1.6)). Если $\varphi(s)$ достаточно быстро убывает при $s\to+\infty$ (необходимая скорость убывания зависит от порядка роста λ_j), то оператор $\varphi(A)$ — ядерный и

$$\operatorname{Tr}\varphi(A)=\sum_j \varphi(\lambda_j)=\int\varphi(\lambda)\,dN(\lambda;A). \tag{9.26}$$

Таким образом, информация относительно $\operatorname{Tr}\varphi(A)$ содержит в себе некоторую информацию о поведении $N(\lambda;A)$. Зная поведение величины $\operatorname{Tr}\varphi(A;t)$ для достаточно богатого семейства функций $\varphi(\lambda;t)$, оказывается возможным определить асимптотическое поведение $N(\lambda;A)$ при $\lambda\to\infty$. Теоремы, доставляющие такую возможность, принято называть *тауберовыми*, отсюда и название метода.

Применение тауберовой техники требует независимого вычисления величины $\operatorname{Tr}\varphi(A;t)$ (а также некоторых, сравнительно грубых, оценок $N(\lambda;A)$). Если A — д. о., то во многих случаях такое вычисление удается провести для функций

$$\varphi(A;t)=\exp(it\sqrt{A}),\quad t\in\mathbf{R};$$
$$\varphi(A;t)=\exp(-At),\ t>0;$$
$$\varphi(A;t)=(A+tI)^{-1},\ t>t_0.$$

В первых двух случаях вычисление оператора $\varphi(A;t)$ связано с решением уравнения $u_{tt}+Au=0$ либо $u_t+Au=0$, в третьем — уравнения $Au+tu=f$. В соответствии с этим, говорят о методе гиперболического уравнения, методе параболического уравнения и резольвентном методе. Резольвентный метод был предложен Карлеманом [193], метод гиперболического уравнения — Б. М. Левитаном [95]. Оба они распространяются на неполуограниченные A; для резольвентного метода это связано с переходом к комплексным t. Метод параболического уравнения, предложенный Минакшисундарамом и Плейелем [295], применим лишь в полуограниченном случае.

Наибольшие достижения последних лет в области спектральных асимптотик (см. п. 9.4) связаны именно с методом гиперболического уравнения. При использовании этого метода необходимо считаться с тем, что оператор $\exp(it\sqrt{A})$ — не ядерный, и величину $\sigma(t)=\operatorname{Tr}\exp(it\sqrt{A})$ приходится рассматривать как обобщенную функцию на $\mathbf{R}$. Особенности этой функции локализованы лишь при $\operatorname{ord} A=2$ (а также при $\operatorname{ord} A=1$, когда взамен $\exp(it\sqrt{A})$ рассматривается $\exp(itA)$. Именно информация об особенностях $\sigma(t)$ дает возможность найти точную асимптотику спектра оператора A. Для получения этой информации используется мощная техника интегральных операторов Фурье и теория распространения особенностей для гиперболических уравнений. Подробному изложению этого материала посвящены §§ 13, 14.

Важной особенностью метода параболического уравнения является то, что оператор $\exp(-At)$, $t>0$, — ядерный, если только собственные значения $\lambda_j(A)$ имеют рост не выше степенного. Так, обстоит дело, в частности, для любого регулярного эллиптического оператора. Функция

$$\theta_A(t)=\operatorname{Tr}\exp(-At)=\sum_j \exp(-\lambda_j(A)t), \tag{9.27}$$

называется *θ-функцией* оператора A. Замечательным (и достаточно неожиданным) свойством θ-функции регулярных эллиптических, а также многих других классов операторов является то, что она допускает полное асимптотическое разложение при $t\to+0$. В простейшей обстановке это разложение имеет вид

$$\theta_A(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\alpha_k}, \quad \alpha_0>\alpha_1>\ldots, \quad \alpha_k\to-\infty, \tag{9.28}$$

(в более сложных случаях разложение может содержать также члены вида $t^{-\alpha}\log^p t$). Это можно истолковать как «сглаживание неравномерностей» в поведении $\lambda_j(A)$, происходящее при вычислении суммы (9.27).

Если A — регулярный эллиптический оператор порядка m в области $X\subset\mathbf{R}^n$, то в (9.28) $\alpha_k=(n-k)/m$ и $c_0=\Gamma(\alpha_0+1)a_0$, где a_0 — коэффициент из (9.12). Асимптотическая формула (9.12) может быть получена из (9.28) с помощью тауберовой теоремы Карамата (см. [342]), однако информация о следующих членах асимптотики, и даже об оценке остатка; при применении этой теоремы теряется. Тем не менее, разложение (9.28) представляет самостоятельный интерес. Коэффициенты в (9.28) называются *коэффициентами Плейеля—Минакшисун-*

дарама. Если A — оператор Лапласа—Бельтрами на римановом многообразии X, то эти коэффициенты содержат разнообразную информацию о геометрии X (см. § 12).

Если A — регулярный эллиптический оператор порядка m на n-мерном многообразии, то, как показывает точная по порядку оценка (5.2), оператор $(A+tI)^{-1}$ — ядерный лишь при $m>n$. Если $m\leqslant n$, то при использовании резольвентного метода приходится рассматривать резольвенту оператора A^k, $mk>n$, либо степени резольвенты оператора A. С помощью резольвентного метода была установлена асимптотика (9.11) для весьма широкого класса эллиптических д. о., а затем найдены квалифицированные (но не точные по порядку) оценки остатка [170]. Впоследствии Метивье [292], усовершенствовав этот метод, получил с его помощью оценку (9.20) (установленную первоначально в рамках гиперболического метода). При оценках $R(\lambda; A)$ важную роль играет исследование резольвенты при комплексных λ.

Исследуя поведение резольвенты при больших t, удается изучить аналитические свойства *ζ-функции* оператора A:

$$\zeta_A(z)=\operatorname{Tr}(A^{-z})=\sum_j(\lambda_j(A))^{-z}. \qquad (9.29)$$

Впервые такое изучение было проведено Сили [318] в случае регулярных эллиптических операторов. При этом ряд (9.29) сходится при $\operatorname{Re} z>n/m$ ($m=\operatorname{ord} A$, $n=\dim X$). Оказывается, что сумма ряда продолжается до мероморфной функции на всей комплексной плоскости. Ее полюса — простые[1], они лежат в точках $z_k=\alpha_k=(n-k)/m$, $k=0, 1, \ldots$; вычет в полюсе α_k равен $c_k/\Gamma(\alpha_k)$, где c_k — коэффициенты из (9.28). Тауберова теорема Икехара (см. [162]) позволяет получить отсюда асимптотику (9.12), но не дает точных оценок остатка. Подробнее о методах параболического уравнения и резольвентном см. § 12.

Поясним, наконец, основную идею метода п. с. п. При $\varphi(\lambda)=\chi_t(\lambda)$, где χ_t — характеристическая функция интервала $(-\infty, t)$, равенство (9.26) дает

$$N(t; A)=\operatorname{Tr}\chi_t(A). \qquad (9.30)$$

Поэтому если бы существовал независимый метод вычисления оператора $\chi_t(A)$, то мы непосредственно имели бы «рабочую формулу» для $N(t; A)$.

Пусть A — с. с. п. д. о. в $\mathbf{R}^n$ с вейлевским символом $A_W(x, \xi)$. Для широкого класса функций φ можно утверждать, что оператор $\varphi(A)$ достаточно хорошо приближается п. д. о. с вейлевским символом $\varphi(A_W(x, \xi))$. Если бы этот класс функций содержал функцию χ_t, то вычисление по формуле (9.30) немедленно привело бы нас к (9.3). К сожалению, однако, такое допущение не-

[1] Для более общего класса д. о. ζ-функция может иметь кратные полюса.

верно. Поэтому функцию χ_t приходится приближать гладкими функциями и оценивать появляющееся при этом отклонение. Техника оценок, которая здесь применяется, имеет некоторые общие черты с вариационной техникой. Подробнее см. § 15.

§ 10. Асимптотика спектра. II. Операторы с «невейлевской» асимптотикой

10.1. Общая схема. В последние годы интенсивно изучаются и такие классы д. о., для которых спектральная асимптотика вида (9.3), (9.9) или (9.11) нарушается. Как правило, это бывает связано с тем, что выражение в правой части соответствующей формулы становится бесконечным. К настоящему времени накоплен достаточно обширный материал на этот счет. Ниже будут приведены основные примеры таких операторов.

В большинстве случаев получающиеся асимптотические формулы укладываются в некоторую общую схему. Пусть речь идет об операторе $A=A^*$ на многообразии X. Обычно ему удается сопоставить следующие объекты: 1) коническое подмногообразие $Z\subset T^*X$ с заданной на нем плотностью dz; 2) семейство гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(z)$, параметризованное точками $z\in Z$; 3) семейство с. с. операторов $\mathscr{A}(z)$ в $\mathfrak{H}(z)$ с дискретным спектром. Формулы спектральной асимптотики для оператора A имеют вид

$$N(\lambda;\ A)\sim c\int_Z N(\lambda;\ \mathscr{A}(z))\,dz, \qquad (10.1)$$

и в неполуограниченном случае,

$$N_\pm(\lambda;\ A)\sim c\int_Z N_\pm(\lambda;\ \mathscr{A}(z))\,dz, \qquad (10.1_\pm)$$

где c — некоторая постоянная. Обычно оказывается, что Z — симплектическое подмногообразие в T^*X и dz — соответствующая инвариантная форма объема; при этом, если $\dim Z=2d$, то $c=(2\pi)^{-d}$. Семейство операторов $\mathscr{A}(z)$ уместно назвать *операторным символом* задачи.

В приведенную схему укладываются также формулы из § 9. В них $Z=T^*X$, $\mathfrak{H}(z)=\mathbf{C}^k$ (k — векторная размерность задачи), $\mathscr{A}(z)$ — вейлевский символ или главный символ оператора A. По своему виду формулы (10.1) и (9.9), (9.11) вполне аналогичны. Таким образом, «невейлевская» асимптотика все-таки оказывается вейлевской, но при другом понимании символа!

Вычисление спектральной асимптотики в «невейлевском» случае сводится, по крайней мере на эвристическом уровне, к отысканию указанных выше характеристик оператора (Z, dz, $\mathfrak{H}(z)$, $\mathscr{A}(z)$) и постоянной c. Общая схема для этого предложена С. З. Левендорским [94]; см. также п. 15.4. Наиболее сложной задачей, как правило, является построение операторного символа $\mathscr{A}(z)$.

Довольно часто оказывается, что $Z=T^*\tilde{X}$, $\tilde{X}$ — подмногообразие в X. Тогда с оператором A обычно удается связать некоторый оператoрнозначный д. о. или п. д. о. $\tilde{A}$ на многообразии $\tilde{X}$ такой, что $N(\lambda;\ A)\sim N(\lambda;\ \tilde{A})$. При этом за $\mathscr{A}(z)$ следует принять операторный символ оператора $\tilde{A}$, а сама формула (10.1) переходит в формулу (9.9) или (9.11) для оператора $\tilde{A}$. Дальнейшее содержание этого параграфа составляет описание примеров.

10.2. Оператор $-\Delta_D$ в областях типа бесконечного рога. Пусть заданы ограниченная область $X'\subset\mathbf{R}^{n-1}$ и непрерывная функция $\varphi(t)>0$, $t\geqslant 1$; $\varphi(1)=1$, $\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$. В области

$$X=\{x=(x',\ t)\in\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}: t>1,\ x'/\varphi(t)\in X'\}$$

рассмотрим (в вариационной постановке; см. пример 3.1) оператор $A=-\Delta_D$. Если $\int_1^\infty \varphi^{n-1}(t)\,dt<\infty$, то $\mathrm{mes}_n X<\infty$ и сохраняется асимптотика (9.6) (при $r=1$). Если же этот интеграл бесконечен, то, при некоторых дополнительных условиях на функцию φ, спектр A совпадает со спектром оператора Шрёдингера на полуоси $t>1: \tilde{A}y=-d^2y/dt^2+V(t)\,y$, $y(1)=0$, с операторным потенциалом $V(t)$, равным $(n-1)$-мерному оператору $-\Delta_D$ в области $X'_t=\varphi(t)\,X'$. В обсуждаемом случае спектр A имеет асимптотику (10.1), где $Z=T^*\tilde{X}\,(\tilde{X}=\{t>1\})$, $dz=dt\,d\xi$, $c=(2\pi)^{-1}$, $\mathfrak{H}(z)=\mathfrak{H}(t,\ \xi)=L_2(X'_t)$, $\mathscr{A}(t,\ \xi)=\xi^2I+V(t)$. Учитывая, что собственные значения $\lambda_j(t)$ оператора $V(t)$ выражаются через $\lambda_j=\lambda_j(1)$ по формуле $\lambda_j(t)=\varphi^{-2}(t)\,\lambda_j$, находим:

$$N(\lambda;\ A)\sim\pi^{-1}\sum_j\int_1^\infty(\lambda-\varphi^{-2}(t)\,\lambda_j)_+^{1/2}\,dt \tag{10.2}$$

(ср. (9.10)). Пусть, в частности, $\varphi(t)\sim t^{-\alpha}$; тогда $\mathrm{mes}\,X=\infty$, коль скоро $\alpha\leqslant(n-1)^{-1}$. Если $\alpha<(n-1)^{-1}$, то, в соответствии с (10.2),

$$N(\lambda;\ A)\sim c(n,\ \alpha)\,\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha}}\sum_j\lambda_j^{-1/2\alpha},$$

причем ряд в правой части сходится в точности при $\alpha<(n-1)^{-1}$. В «пограничном» случае $\alpha=(n-1)^{-1}$ будет $N(\lambda;\ A)\sim c(n)\,\lambda^{n/2}\log\lambda\,\mathrm{mes}_{n-1}X'$. Подробнее см. [132].

10.3. Эллиптические операторы, вырождающиеся на границе области. Пусть $A=\mathscr{L}_{\alpha,\,D}$ или $A=\mathscr{L}_{\alpha,\,W}$ — оператор из примера 3.4. Тогда мера в правой части (9.15) конечна в точности при $\alpha<2n^{-1}$; при этом условии асимптотика спектра — вейлевская. Если $2n^{-1}<\alpha<2$ (напомним, что при $\alpha\geqslant 2$ спектр уже не дискретен), то справедлива формула (10.1), в которой $Z = T^*\partial X$, dz — форма симплектического $(2n-2)$-мерного объема на Z, $c=(2\pi)^{-(n-1)}$; при всех $z \in Z$, $\mathfrak{H}(z)=L_2(\mathbf{R}_+)$. Для описания операторов $A(z)$ введем следующие обозначения. Пусть $x \in \partial X$ и $\nu=\nu(x)=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂X в точке x. Элементы $\xi \in T_x^*\partial X$ отождествим с векторами $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \perp \nu(x)$. Тогда $\mathcal{A}(z)=Op(a_z)$, где $a_z=a_{x,\xi}$ — форма в пространстве $L_2(\mathbf{R}_+)$:

$$a_{x,\xi}[f]=\int\limits_{\mathbf{R}_+} t^\alpha \sum_{i,j} a_{ij}(x)(\xi_i+\nu_i D_t)f(t)\overline{(\xi_j-\nu_j D_t)f(t)}\,dt,$$

рассматриваемая на области определения

$$H^1_\alpha(\mathbf{R}_+)=\left\{f \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+): \int\limits_{\mathbf{R}_+} t^\alpha(|f'|^2+|f|^2)\,dt<\infty\right\}$$

в случае оператора $\mathcal{L}_{\alpha,N}$ и на $\overset{0}{H}{}^1_\alpha(\mathbf{R}_+)$ — в случае оператора $\mathcal{L}_{\alpha,D}$. Таким образом, для операторов с сильным вырождением эллиптичности (т. е. при $\alpha n>2$) асимптотика спектра зависит от вида граничного условия.

Аналогичный вид имеет асимптотическая формула и для сильно вырождающихся эллиптических операторов порядка $m>2$. При $m=2$ результат можно преобразовать к более простому виду:

$$N(\lambda;\ A)\sim\frac{v_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}\lambda^\theta w\int\limits_{\partial X}\frac{(a\nu,\nu)^{\frac{n}{2}-\theta}}{\sqrt{\det a}}\,dS,\quad \theta=(n-1)/2\alpha,$$

$a=a(x)=\{a_{ij}(x)\}$. Здесь $w=\sum\limits_j \mu_j^\theta$, где μ_j — собственные значения уравнения $-(t^\alpha y')'+t^\alpha y=\mu y$, $t \in \mathbf{R}_+$, при условии $y(0)=0$ (оператор $\mathcal{L}_{\alpha,D}$) или $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha y'(t)=0$ (оператор $\mathcal{L}_{\alpha,N}$). Ряды для w сходятся в точности при $\alpha n>2$.

В отличие от предыдущего примера, приведенная схема исключает «пограничный случай» $\alpha n=2$. В этом случае для обоих операторов будет

$$N(\lambda;\ A)\sim\frac{nv_n}{(2n-2)(2\pi)^n}\lambda^{n/2}\log\lambda\int\limits_{\partial X}\frac{dS}{\sqrt{\det a}}.$$

Подробнее см. [24], [46], [47], а также указанную там литературу.

10.4. Гипоэллиптические операторы с двойными характеристиками. Пусть A — скалярный с. с. д. о. порядка m на компактном n-мерном многообразии X без края. Предположим, что его главный символ A^0 неотрицателен и обращается в нуль на некотором подмногообразии $\Sigma \subset T^*X$ размерности $2d$, причем имеет на Σ нуль в точности 2-го порядка. Предположим также, что Σ симплектично, т. е., что каноническая 2-форма $\omega = \sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ не выродена на Σ. Как известно ([254], [346]), микролокально Σ вложено в T^*X как $T^*\mathbf{R}^d$ в $T^*\mathbf{R}^n$. В соответствующих канонических координатах $(y, \eta, t, \tau) \in T^*\mathbf{R}^d \times T^*\mathbf{R}^{n-d}$ положим

$$P_{y,\eta}(t, \tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} D_t^\alpha D_\tau^\alpha A^0(y, \eta, t, \tau)\Big|_{t=\tau=0} t^\alpha \tau^\beta + \\ + A_1(y, \eta, 0, 0), \tag{10.3}$$

где A_1 — символ порядка $m-1$ оператора A. Предположим, что при любых y, $\eta \neq 0$ дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами $P_{y,\eta}(t, D_t)u = 0$ не имеет ненулевых решений из класса Шварца $S(\mathbf{R}^{n-d})$; это — условие *гипоэллиптичности с потерей одной производной*, и при его выполнении спектр A дискретен. Однако при сделанных предположениях оператор A не обязательно полуограничен.

Результаты об асимптотике спектра таковы. При $m(n-d) > n$ для $N_\pm(\lambda; A)$ справедливы вейлевские формулы ($9.17_\pm$); поскольку главный символ A^0 неотрицателен, из ($9.17_\pm$) находим, что $N_+(\lambda; A) \sim a_0 \lambda^{n/m}$, $a_0 > 0$; $N_-(\lambda; A) = o(\lambda^{n/m})$.

Если $m(n-d) < n$, то имеют место формулы ($10.1_\pm$), в которых $Z = \Sigma$, dz — форма симплектического объема на Σ, $c = (2\pi)^{-d}$. Далее, $\mathfrak{H}(z) = L_2(\mathbf{R}^{n-d})$ при всех $z = (y, \eta) \in \Sigma$, и в качестве $\mathscr{A}(z)$ следует принять операторы $\mathscr{A}(z) = \mathscr{A}(y, \eta) = \overline{P_{y,\eta}(t, D_t)}$; отметим, что операторы (10.3) сущ. с. с. в $L_2(\mathbf{R}^{n-d})$. Отметим также, что канонической замене переменных на Σ соответствует замена операторов $P_{y,\eta}$ на унитарно эквивалентные, так что их спектры (входящие в формулу ($10.1_\pm$)) не зависят от выбора канонических координат.

Асимптотика $N_\pm(\lambda; A)$ при $m(n-d) < n$ оказывается степенной, порядка $\lambda^{d/(m-1)}$, причем в обеих формулах для $N_\pm$ коэффициенты, вообще говоря, отличны от нуля. Как и в п. 10.3, схема не включает «пограничного случая» $m(n-d) = n$, когда $N_+(\lambda; A) \sim a_0' \lambda^{n/m} \log \lambda$, $N_-(\lambda; A) = o(\lambda^{n/m} \log \lambda)$. Выражение для a_0' содержит интеграл по Σ от гессиана символа A_0. По поводу этих результатов, а также их обобщений на случай несимплектического Σ и характеристик высокой кратности, см. [94], [173], [287], [288], [296].

10.5. Оператор Кона—Лапласа (см., например, [291], [346]). Пусть X — ограниченная область в $\mathbf{C}^N \cong \mathbf{R}^{2N}$. Рассмотрим пространства $L_2(X, q)$ форм типа $(0, q)$ на X, т. е. форм вида $\sum u_J d\bar{z}_J$, где сумма распространяется на наборы индексов $J = (j_1, \ldots, j_q)$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant N$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$; ниже используется обозначение $|J|=q$. Линейный оператор Коши—Римана $\bar\partial$ переводит $(0, q)$-формы в $(0, q+1)$-формы, $\bar\partial(u_J d\bar z_J)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u_J}{\partial \bar z_j}d\bar z_j\wedge$ $\wedge d\bar z_J$. Предположим далее, что X задается неравенством $\varphi(z)=$ $=\varphi(x, y)<0$, где φ — гладкая функция, $\nabla\varphi\neq 0$ на ∂X. Рассмотрим при $z\in\partial X$ матрицу $\sigma_q(z)=(\sigma_{J,J'}(z))$, $|J|=q$, $|J'|=$ $=q-1$; именно, $\sigma_{J,J'}=0$ при $J'\not\subset J$ и $\sigma_{J,J'}=2i\varepsilon_J^{k,J'}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}$ при $J=J'\cup\{k\}$, где $\varepsilon_J^{k,J'}$ — знак перестановки, переводящей (k, J') в J. *Оператор Кона—Лапласа* — это с. с. оператор в $L^2(X, q)$, заданный д. в. $\square\left(\sum_{|J|=q}u_J d\bar z_J\right)=-\frac{1}{2}\sum_{|J|=q}\Delta u_J d\bar z_J$ и граничными условиями $\sigma_q u|_{\partial X}=0$, $\sigma_{q+1}\partial u|_{\partial X}=0$.

Д. о. A при $q<N$ не является оператором регулярной краевой задачи, так как условие Шапиро — Лопатинского нарушается в каждой точке границы. При сведении оператора A к п. д. о. на границе (см. [346]) оказывается, что соответствующее характеристическое многообразие $\Sigma\subset T^*\partial X$ пересекается с каждым слоем $T_z^*\partial X$ по одному лучу, причем характеристика в точности двукратная. Введем в окрестности точки $z_0\in\partial X$ локальные координаты так, что X задается неравенством $s=\operatorname{Im} z_n>\psi(z', t)$, $t=\operatorname{Re} z_n$, $\psi(z_0)=0$, $\nabla\psi(z_0)\neq 0$. Пусть $\mu_j=\mu_j(z)$ — собственные значения формы Леви $L(z_0, w)=\sum_{j,k<N}\frac{\partial^2\psi(z_0)}{\partial z_j\partial\bar z_k}w_j\bar w_k$. Для того, чтобы оператор A был гипоэллиптичен с потерей одной производной, необходимо и достаточно, чтобы при всех $z_0\in\partial X$ среди чисел $\mu_j(z_0)$ было хотя бы $N-q$ строго положительных или хотя бы $q+1$ строго отрицательных. Если это условие выполнено, то имеет место асимптотика

$$N(\lambda; A)\sim N_X(\lambda)+N_{\partial X}(\lambda). \tag{10.4}$$

Слагаемое $N_X(\lambda)$ имеет такую же природу, как и асимптотика для регулярных задач и подчиняется формуле, аналогичной (9.6) при $n=2N$, $r=1$, таким образом, $N_X(\lambda)=\binom{N}{q}\frac{\operatorname{mes} X}{(2\pi)^n n!}\lambda^N$. Второе слагаемое в (10.4) отражает нарушение регулярности граничного условия и имеет вид

$$N_{\partial N}(\lambda)\sim\lambda^N\int_Z c(z, \tau)\,dz\,d\tau, \tag{10.5}$$

где $c(z, \tau)$ — функция на $Z=\partial X\times\mathbf{R}_+$, выражающаяся через числа $\mu_j(z)$ (см. [291], [346]). Формула (10.5) не сводится непосредственно к (10.1), поскольку характеристическое многообразие Z не симплектично, ранг фундаментальной формы на Z равен в точности единице.

10.6. n-мерный оператор Шрёдингера с однородным потенциалом. Пусть в (2.18) потенциал $V(x) \geqslant 0$ непрерывен и положительно однороден порядка $a > 0$:

$$V(tx) = t^a V(x) \quad \forall t > 0.$$

Если $V(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то спектр дискретен и для него справедлива асимптотика (9.8). Положение сложнее, если $V(x) = 0$ на некотором (коническом) подмножестве $M = M(V) \subset \mathbf{R}^n$, ясно, что это означает весьма нерегулярное поведение потенциала на бесконечности.

Предположим, что M представляет собой гладкое коническое многообразие, $\dim M = d$. Ниже через $N_y M$ обозначается подпространство, нормальное к M в точке $y \in M \setminus \{0\}$. Предположим, что при некотором $a_0 \in (0, a)$ для любых точек $y \in M \setminus \{0\}$, $v \in N_y M$ существует положительный предел

$$F(y, v) = \lim_{t \to 0} t^{-(a-a_0)} V(y + tv),$$

причем сходимость равномерна по отношению к $|y| = |v| = 1$; тогда спектр оператора $-\Delta + V(x)$ дискретен. Для описания его асимптотики введем показатель $\theta = da_0^{-1}\left(a + \frac{a}{2}\right)$. Если $da < na_0$, то сохраняется асимптотика (9.8). Если же $da > na_0$, то справедлива формула (10.1), где $Z = T^*M$, dz — элемент симплектического объема на Z, $c = (2\pi)^{-d}$. При этом, если в локальных координатах $z = (y, \xi)$, где $y \in M$, $\xi \in T_y^*M$, то $H(z) = L_2(N_y M)$ и $\mathscr{A}(z) = \mathscr{A}(y, \xi)$ — $(n-d)$-мерный оператор Шрёдингера:

$$\mathscr{A}(y, \xi) = -\Delta_v + |\xi|^2 + F(y, v).$$

Обозначим через $\lambda_j(y)$ собственные значения оператора $A(y, 0)$. Тогда, в соответствии с (10.1) (ср. 9.10),

$$N(\lambda; A) \sim (2\pi)^{-d} v_d \sum_j \int_M (\lambda - \lambda_j(y))_+^{d/2} dS(y) =$$

$$= c\lambda^\theta \int_{M \cap S^{n-1}} \sum_j (\lambda_j(y))^{\theta - \frac{d}{2}} dS(y), \quad \theta = da_0^{-1}\left(1 + \frac{a}{2}\right),$$

$$c = c(d, a, a_0);$$

интегрирование — по $(d-1)$-мерной площади на $M \cap S^{n-1}$.

Как и в ряде предшествующих примеров, формула не охватывает пограничного случая $da = na_0$, когда асимптотика имеет вид $N(\lambda; A) \sim c\lambda^\theta \log \lambda$.

По поводу этих, а также близких и несколько более общих результатов см. [94], [146].

10.7. Компактные операторы с невейлевской асимптотикой спектра. Невейлевскую асимптотику спектра имеют также некоторые классы интегральных (компактных) операторов. Для таких операторов как правило сохраняются формулы типа

$(10.1_\pm)$; надо лишь всюду заменить функции $N_\pm$ на $n_\pm$ (ср. $(9.23_\pm)$).

Сказанное относится, в частности, к интегральным операторам, ядра которых имеют особенности лишь на границе области. Опишем простейший («модельный») результат в этом направлении; подробнее см. [89], [240]. Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ — выпуклая ограниченная область с гладкой границей,

$$\rho_\alpha(x, y)=\left(\min_{v\in\partial X}(|x-v|+|v-y|)\right)^\alpha, \quad \alpha>-n.$$

Рассмотрим в пространстве $L_2(X)$ интегральный оператор T_α с ядром $\rho_\alpha(x, y)$. Оказывается, что его спектр асимптотически совпадает со спектром некоторого операторного п. д. о. $\tilde{T}_\alpha$ в пространстве $L_2(\partial X; L_2(\mathbf{R}_+))$. Операторный символ $\tilde{t}_\alpha(x, \xi')$ этого п. д. о. при любых $x\in\partial X$, $\xi'\in T_x^*\partial X$, представляет собой интегральный оператор в $L_2(\mathbf{R}_+)$:

$$(\tilde{t}_\alpha(x, \xi') f)(t)=\int_0^\infty \omega_\alpha(|\xi'|, t+s) f(s)\,ds; \tag{10.6}$$

здесь $\omega_\alpha(|\xi'|, t)$ — преобразование Фурье по $y\in\mathbf{R}^{n-1}$ (в смысле обобщенных функций) от $(|y|^2+t^2)^{\alpha/2}$, т. е. известное ядро Бесселя—Макдональда. Для вычисления асимптотики спектра п. д. о. $\tilde{T}_\alpha$ применимы формулы вида $(10.1_\pm)$ (с заменой $N_\pm$ на $n_\pm$). В результате находим, что при $\lambda\to+0$

$$n_\pm(\lambda; T_\alpha)\sim v_{n-1}(2\pi)^{-(n-1)}\cdot\lambda^{-\frac{n-1}{n+\alpha}}\sum_k(\mu_k^\pm)^{\frac{n-1}{n+\alpha}}, \tag{10.7}$$

где $\pm\mu_k^\pm$ — положительные и отрицательные собственные значения оператора (10.6) при $|\xi'|=1$. (Если $\alpha<0$, то отрицательного спектра нет.) Формулу (10.7) уместно сопоставить с формулами из п. 10.2, 10.3.

§ 11. Вариационная техника в задачах о спектральной асимптотике

11.1. Непрерывность асимптотических коэффициентов. Для работ по спектральным асимптотикам, использующих вариационную технику, характерно сочетание стандартных вариационных приемов (типа равенства (1.12) и теоремы 1.6) с соображениями теории возмущеиий.

Уже в первой работе по асимптотике спектра оператора Лапласа [349] Г. Вейль доказал и с успехом использовал следующее важное (хотя и простсе) утверждение.

Лемма 11.1. Пусть T, V — компактные с. с. операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем $n_\pm(\lambda; T)\sim a_\pm\lambda^{-\alpha}$, $a_\pm\neq0$, и $n_\pm(\lambda; V)=o(\lambda^{-\alpha})$ при $\lambda\to+0$. Тогда $n_\pm(\lambda; T+V)\sim a_\pm\lambda^{-\alpha}$.

Приводимое ниже предложение, также нашедшее многочисленные применения в работах по спектральной асимптотике, по духу близко к лемме 11.1. Обозначим через Σ_q, $q>0$, линейное пространство компактных операторов T в $\mathfrak{H}$, для s-чисел которых (см. п. 1.12) выполнено соотношение $s_n(T)=O(n^{-1/q})$ или, что то же самое, $n(s;\ T)=O(s^{-q})$, $s\to 0$. Величина $\sup\limits_s(sn^{1/q}(s;\ T))$ представляет собой *квазинорму*[1], с помощью которой в Σ_q стандартным образом вводится топология. Если $T\in\Sigma_q$ — с. с. оператор, то для него конечны функционалы

$$\Delta_q^{\pm}(T)=\varlimsup_{\lambda\to+0}\lambda^q n_{\pm}(\lambda;\ T),\qquad \delta_q^{\pm}(T)=\varliminf_{\lambda\to+0}\lambda^q n_{\pm}(\lambda;\ T).\tag{11.1}$$

Ясно что существование правильной степенной асимптотики $n_{\pm}(\lambda;\ T)$ равносильно тому, что при некотором $q>0$

$$\Delta_q^{\pm}(T)=\delta_q^{\pm}(T)\neq 0.$$

Лемма 11.2 ([22], [23]). На множестве с. с. операторов $T\in\Sigma_q$ функционалы (11.1) непрерывны.

Утверждения аналогичного характера имеются в [133] и для операторов с нестепенной асимптотикой функций $n_{\pm}(\lambda;\ T)$.

11.2. Схема доказательства формулы (9.25). Для применения леммы 11.2 необходим соответствующий аналитический аппарат. Простейшая задача, в которой вариационная техника оказывается эффективной,— это задача о спектре взвешенного полигармонического оператора (см. (9.24)). Для нее таким аппаратом служит оценка (5.8).

Ниже $a_{r,\varepsilon}$, b_p — квадратичные формы (3.12), (3.13). Пусть фиксированы область $X\subset\mathbb{R}^n$ и значения параметров r, ε. Обозначим через $\Phi_D=\Phi_{X,D}$ отображение, сопоставляющее функции p оператор $T(\overset{0}{H}{}^r(X);\ a_{r,\varepsilon},\ b_p)$ (см. п. 1.10); аналогичный смысл имеет обозначение $\Phi_N=\Phi_{X,N}$. Из оценки (5.7) вытекает, что в условиях примеров 5.6, 5.7 Φ_D, Φ_N непрерывны как отображения из $L_\gamma(X)$ в $\Sigma_{n/2r}$. Отсюда, в силу леммы 11.2, следует, что множество тех p, для которых справедлива асимптотика (9.25), замкнуто в $L_\gamma(X)$.

Другое, несколько более сложно доказываемое следствие оценки (5.7) и лемм 11.1, 11.2 состоит в том, что для ограниченных областей с липшицевой границей при $p\in L_\gamma(X)$

$$\Delta_{n/2r}^{\pm}(\Phi_D p)=\Delta_{n/2r}^{\pm}(\Phi_N p);\qquad \delta_{n/2r}^{\pm}(\Phi_D p)=\delta_{n/2r}^{\pm}(\Phi_N p).\tag{11.2}$$

Важно, что равенство (11.2) имеет априорный характер: оно не

---

[1] *Квазинорма* Q на линейном пространстве $\mathfrak{X}$ — это функционал, удовлетворяющий всем свойствам нормы, за исключением неравенства треугольника, которое заменяется на более слабое условие: с некоторой постоянной $c\geqslant 1$ для всех x, $y\in\mathfrak{X}$ должно быть $Q(x+y)\leqslant c(Q(x)+Q(y))$.

предполагает заранее существования «правильных» асимптотик, т. е. равенств типа $\Delta^{\pm}=\delta^{\pm}$.

Наконец, еще одно следствие состоит в том, что для задачи D функционалы $\Delta^{\pm}_{n/2r}$, $\delta^{\pm}_{n/2r}$ в определенном смысле непрерывно зависят от области X.

После этих замечаний доказательство асимптотической формулы (9.25) не составляет труда. Оно разбивается на два этапа.

Анализ модельной задачи. Пусть $p=\text{const}$ и $X=(0,2\pi)^n$. Отождествляя противоположные грани куба X, получаем тор $\mathbf{T}^n$. Пусть $\widetilde{H}^r(X)$ — пространство функций на X, которое при этом переходит в $H^r(\mathbf{T}^n)$. Собственные значения оператора $\widetilde{T}=T(\widetilde{H}^r(X);\ a_{r,\varepsilon},\ b_p)$ равны $p(|j|^{2r}+\varepsilon)^{-1}$, $j\in\mathbf{Z}^n$, и элементарное вычисление (того же типа, что в п. 9.2), приводит к формуле (9.25) для спектра оператора $\widetilde{T}$. Так как $\overset{0}{H}{}^r(X)\subset\widetilde{H}^r(X)\subset H^r(X)$, то (в соответствии с теоремой 1.4) величины $\Delta^{\pm}_{n/2r}(\widetilde{T})$, $\delta^{\pm}_{n/2r}(\widetilde{T})$ заключены между такими же величинами для операторов $\Phi_D p$, $\Phi_N p$. Теперь из (11.2) следует, что асимптотика (9.25), уже установленная для $\widetilde{T}$, распространяется и на операторы задач D и N в кубе X. Аналогично обстоит дело для куба произвольного размера.

Переход к общему случаю. Пусть сначала область X допускает разложение в конечное число кубов X_j, $j=\overline{1,\ j_0}$, в каждом из которых $p=p_j=\text{const}$. Из вариационного принципа (1.17) легко выводится, что

$$\sum_j n_{\pm}(\lambda;\ \Phi_{X_j,D}p_j)\leqslant n_{\pm}(\lambda;\ \Phi_{X,D}(p)\leqslant n_{\pm}(\lambda;\ \Phi_{X,N}p)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_j n_{\pm}(\lambda;\ \Phi_{X_j,N}p_j).$$

Здесь уже известно, что крайние члены имеют одинаковое асимптотическое поведение при $\lambda\to+0$. Следовательно, таково же поведение обоих средних членов. Это дает, для рассматриваемого случая, формулу (9.25) для обоих операторов $\Phi_{X,D}p$, $\Phi_{X,N}p$. Упомянутая выше непрерывная зависимость функционалов $\Delta^{\pm}_{n/2r}$, $\delta^{\pm}_{n/2r}$ от p и от X автоматически распространяет результат на случай операторов $\Phi_{X,D}\,p$ для произвольных X и p, удовлетворяющих условиям примера 5.6. Если X — ограниченная область с липшицевой границей, то в силу (11.2) та же формула справедлива и для спектра оператора $\Phi_{X;N}p$.

Итак, для спектра взвешенного полигармонического оператора в условиях примеров 5.6, 5.7 имеет место асимптотика (9.25).

В частности (при $p=1$) получаем, что спектр оператора $(-\Delta)_D^r$ в произвольной области $X\subset\mathbf{R}^n$, если $2r<n$, и в произвольной ограниченной области, если $2r\geqslant n$, имеет асимптотику (9.6). На самом деле, условие ограничеииости X может быть снято и при $2r\geqslant n$ (см. [132]); при этом используется оценка (5.4).

Основной недостаток того варианта вариационной техники, который основан на применении утверждений типа леммы 11.2, состоит в том, что он не дает квалифицированных оценок остаточного члена асимптотики.

11.3. Некоторые другие применения вариационного метода. На описанном пути были получены разнообразные результаты; приведем формулировки некоторых из них. Одна серия результатов относится к операторам с разрывными старшими коэффициентами. Мы ограничимся случаем операторов 2-го порядка.

Теорема 11.1. *Пусть X — произвольная область конечной меры в случае задачи D, X — ограниченная область с липшицевой границей в случае задачи N, и пусть l — форма (3.1) с вещественными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2.9). Тогда для спектра соответствующих операторов $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_N$ (см. пример 3.1) имеет место асимптотика (9.16).*

Некоторые из предположений теоремы можно ослабить. Так, можно допустить коэффициенты $a_{ij}\in L_{1,\,\mathrm{loc}}(X)$, при $n>2$ отказаться от условия конечности меры X, а также разрешить не слишком сильное вырождение эллиптичности (не обязательно локализованное вблизи границы). Имеется также распространение на уравнения и системы высших порядков «вариационного типа»; подробнее см. [22].

С помощью вариационной техники были получены результаты п. 10.3 (операторы с вырождением эллиптичности на границе области) [46], а также их обобщения на другие типы вырождающихся эллиптических операторов [47]; различные варианты вариационного метода были использованы и при выводе формул, приведенных в пп. 10.2, 10.5, 10.6, 10.7.

Для оператора Шрёдингера с растущим потенциалом V формула (9.8) при достаточно общих условиях на V была впервые получена вариационным методом в его элементарном варианте. Затем к этому кругу вопросов применялась тауберова техника [82], [83], [345], что позволило существенно расширить класс допустимых потенциалов. В еще более широких предположениях формула (9.8) была оправдана в работе [133], где снова использовался вариационный метод, но уже в духе п. 11.2.

Приведем формулировку основного результата работы [133]. Ниже приняты следующие обозначения. Если V — вещественнозначная функция в $\mathbf{R}^n$, то

$$\sigma(\lambda,\ V)=\mathrm{mes}_n\{x\in\mathbf{R}^n : V(x)>\lambda\}; \tag{11.3}$$

для произвольного единичного куба $Q \subset \mathbf{R}^n$ $V_Q = \int\limits_Q V dx$ и $\omega_1(V, t; Q)$ — модуль непрерывности функции V в метрике пространства $L_1(Q)$.

Теорема 11.2. Пусть потенциал $V(x) \geqslant 1$ удовлетворяет условию (2.21) и кроме того:

а) $\sigma(2\lambda; V) \leqslant c_1 \sigma(\lambda, V)$ при достаточно больших λ;

б) существуют непрерывная возрастающая функция $\eta(t)$, $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\eta(0) = 0$, и показатель $\beta \in [0, 1/2]$ такие, что для произвольного единичного куба $Q \in \mathbf{R}^n$.

$$\omega_1(V, t; Q) \leqslant \eta(t) t^{2\beta} V_Q^{1+\beta}.$$

Тогда для оператора Шрёдингера с потенциалом V справедлива формула (9.8).

Теорема 11.2 не охватывает потенциалов, растущих медленнее степенного (не выполнено условие а). Для таких потенциалов V формула (9.8) также оказывается справедливой при некоторых условиях регулярности роста V. По этому поводу см. [31].

Если потенциал V достаточно регулярен, то в асимптотической формуле для $N(\lambda)$ получены и квалифицированные оценки остатка (см. [338]). Эти результаты обобщаются на широкий класс операторов в $\mathbf{R}^n$ с символом Вейля $A_W(x, \xi)$, стремящихся к бесконечности при $|x| + |\xi| \to \infty$ ([243], [244], [252], [253]). В этих работах использовалась тауберова техника.

Для отрицательных потенциалов, стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$, результат, также полученный вариационными средствами, таков [135]. Напомним, что речь здесь идет об асимптотике отрицательного спектра при $\lambda \to -0$.

Теорема 11.3. Пусть $n \geqslant 3$ и пусть потенциал $V(x) < 0$, $V(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, удовлетворяет следующим условиям.

а) $\sigma(\lambda/2, V) \leqslant c_2 \sigma(\lambda, V)$ (σ определено в (11.3)) при достаточно малых по модулю $\lambda < 0$;

б) $|\nabla V(x)| = o(|V(x)|^{3/2})$ при $|x| \to \infty$

Тогда справедлива асимптотическая формула (9.8) при $\lambda \to -0$.

Для гладких V и здесь можно указать квалифицированные оценки остатка в асимптотике (см. [261], [337], где использовалась тауберова техника).

Как уже указывалось, вариационный подход обычно не дает хороших оценок остатка в асимптотических формулах. Одно из исключений составляет случай регулярных граничных задач для эллиптических операторов с постоянными коэффициентами. Так, для операторов Δ_D, Δ_N еще Курант [208] получил оценку остатка $O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \ln \lambda\right)$, лишь логарифмическим множителем отличающуюся от доказанной позднее точной оценки (9.20).

Своеобразный вариант вариационной техники, приспособленный для оценок остатка в асимптотических формулах, разработал Метивье [289]. Важную роль при этом играют двупараметрические (по Λ и по спектральному параметру) оценки спектра вариационных троек $\{d_\Lambda^-, a, b\}$, где $d_\Lambda=\{u\in H^r(X):\mathscr{L}u=\Lambda u\}$ ($\mathscr{L}$ — заданное эллиптическое д. в. порядка $2r$), $a[u]=\|u\|^2_{H^r}$, $b[u]=\|u\|^2_{L_2}$; ср. с задачами из п. 11.4. С помощью развитой техники в [289] получены оценки «курантовского типа» для операторов с постоянными старшими коэффициентами. Для операторов с переменными (гёльдеровскими старшими коэффициентами на этом пути удалось получить оценки вида $R(\lambda; A)=O(\lambda^{(n-\theta)/2r})$, где величина θ определяется показателем Гёльдера. Ранее такие оценки были получены в рамках резольвентного метода (см. [170]), но при несколько больших предположениях регулярности коэффициентов и границы области. В дальнейшем техника Метивье была распространена [76] на задачи вида $Bu=\lambda Au$ с эллиптическим оператором A и произвольным (незнакоопределенным) д. о. B.

Важным результатом работы [289] является оправдание в достаточно широкой обстановке разложения вида

$$N(\lambda;\ A)\sim\Phi_1(\lambda)+\Phi_2(\lambda), \qquad (11.4)$$

где Φ_1 — вейлевский главный член асимптотики для оператора A, а Φ_2 определяются вкладом от окрестности границы. Построены примеры нерегулярных областей, в которых для оператора $-\Delta_N$ член Φ_2 в разложении (11.4) оказывается старшим.

11.4. Задачи со связями. Своеобразный класс вариационных задач на спектр составляют задачи с дифференциальными связями (по другой терминологии — вариационные задачи на подпространствах). Приведем несколько примеров.

Пример 11.1. *Задача Стокса о спектре вариационной тройки* $\{d;\ a,\ b\}$, где

$$d=\{u=\{u_j\}_1^3\in(H^1(X))^3:\operatorname{div}u=0,\ \int_X u_j dx=0,\ j=1,2,3\}$$

(X — ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с липшицевой границей);

$$a[u]=\int_X\sum_j|\nabla u_j|^2dx,\quad b[u]=\int_X\sum_j|u_j|^2dx.$$

Пример 11.2. *Задача Стеклова о спектре тройки*, в которой

$$d=\left\{u\in H^1(X):\Delta u=0;\ \int_{\partial X}\sigma u dS=0\right\},$$

$$a[u]=\int_X|\nabla u|^2dx;\quad b[u]=\int_{\partial X}\sigma|u|^2dS.$$

Здесь $X \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей; предполагается, что $\int\limits_{\partial X} \sigma dS \neq 0$. Этот пример, впрочем, не столь типичен, так как «связь» $\Delta u = 0$ возникает как естественное условие в смысле вариационного исчисления и может быть исключена из исходной постановки задачи (см. пример 3.11 и (3.16)).

Пример 11.3. Пусть $d = \left\{u \in H^1(X) : \Delta u = 0, \int\limits_X u dx = 0\right\}$, $a[u] = \int\limits_X |\nabla u|^2 dx$, $b[u] = \int\limits_X |u|^2 dx$. Спектр вариационной тройки $\{d; a, b\}$ совпадает (см. [20]) со спектром оператора $\Delta_D^{-1} - \Delta_N^{-1}$ в области X.

В общей обстановке речь идет о вариационных задачах на вектор-функциях размерности $k \geqslant 1$, удовлетворяющих скалярным дифференциальным уравнениям связи $\mathscr{L}_s u = 0$, $s = \overline{1, l}$; $l \leqslant k$, и, возможно, нескольким соотношениям ортогональности. При $l < k$ говорят о *неполной системе связей*, при $l = k$ — о *полной системе связей*. Задачам 1-го типа посвящены работы [29], [290], в [29] допускаются также псевдодифференциальные уравнения связи. Для этих задач характерна асимптотика вейлевского типа. Основное отличие от формул из § 9 состоит в том, что оператор $A^0(z) = A^0(x, \xi)$, спектр которого участвует в формулах типа (9.11), (9.23), теперь действует не во всем пространстве $\mathbf{C}^k$, а в его $(k-l)$-мерном подпространстве $\{f \in \mathbf{C}^k : \mathscr{L}_s^0(x, \xi) f = 0, s \in \overline{1, l}\}$.

Так, в примере 11.1 это подпространство есть

$$\{f = \{f_j\}_1^3 \in \mathbf{C}^3 : \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0\}. \tag{11.5}$$

Если в этом примере «снять» условие связи $\operatorname{div} u = 0$, то задача сведется к ортогональной сумме трех экземпляров оператора $-\Delta_N^{-1}$; в соответствии с формулой (9.6) (при $n = 3$, $m = 2$) тогда $n_+(\lambda) \sim 3 v_3 (2\pi)^{-3} \lambda^{-3/2} \operatorname{mes} X$. Связь (11.5) понижает векторную размерность задачи с 3 до 2; поэтому в примере 11.1

$$n_+(\lambda) \sim \frac{2}{3} \cdot 3 v_3 (2\pi)^{-3} \lambda^{-3/2} \operatorname{mes} X = (3\pi^2)^{-1} \lambda^{-3/2} \operatorname{mes} X.$$

Задачи с полной системой связей рассматривались в [26], [28]. В этих работах установлено, что при условии эллиптичности системы связей спектр таких задач асимптотически совпадает со спектром некоторого п. д. о. отрицательного порядка на ∂X; для его главного символа даны явные формулы. После этого вычисление асимптотики спектра рассматриваемой задачи сводится к применению формулы (9.23).

В частности, для примера 11.2

$$n_{\pm}(\lambda) \sim (2\pi)^{-(n-1)} v_{n-1} \int\limits_{\partial X} (\sigma_{\pm}(x))^{n-1} dS \cdot \lambda^{-(n-1)};$$

для примера 11.3 $n_{-}(\lambda)=0$, а

$$n_{+}(\lambda) \sim (2\pi)^{-(n-1)} v_{n-1} S \cdot (2\lambda)^{-(n-1)}$$

(S — $(n-1)$-мерная площадь ∂X).

Пример 11.2 можно рассматривать также в рамках теории «уравнений со спектральным параметром в граничном условии». Весьма общий метод анализа таких задач разработан А. Н. Кожевниковым [75]. В работах Грубб (см. [240]) найдены формулы спектральной асимптотики для так называемых «сингулярных операторов Грина». Это дает еще один подход для изучения спектра задач с полной системой связей.

§ 12. Резольвентный и параболический методы. Спектральная геометрия

Как уже отмечалось в п. 9.7, тауберовы методы изучения асимптотики спектра опираются на исследование функций от оператора A:

$$\varphi(A, z) = \int \varphi(\lambda, z)\, dE^{A}(\lambda)$$

для подходящего семейства функций $\varphi(\lambda, z)$. В этом параграфе мы рассмотрим тауберовы методы, отвечающие функциям $(\lambda-z)^{-1}$, $(\lambda^{l}-z)^{-1}$, λ^{-z} и $e^{-\lambda z}$. Эти методы обладают тем общим свойством, что соответствующее им преобразование функции распределения спектра

$$\Phi(A, z) = \mathrm{Tr}\, \varphi(A, z) = \int \varphi(\lambda, z)\, dN(\lambda;\ A)$$

«сглаживает» меру $dN(\lambda;\ A)$ (особенно сильно этот эффект проявляется для функций λ^{-z}, $e^{-\lambda z}$). По этой причине функция $\Phi(A, z)$ оказывается весьма регулярной, она может в явном виде описывать большое количество «усредненных» спектральных характеристик оператора A. С другой стороны, $\Phi(A, z)$ «не замечает» аномалий в расположении собственных значений (таких, скажем, как собственные значения большой кратности), поэтому с их помощью пока не удается выделить ситуации, в которых имеется степенной второй член асимптотики. В этом отношении они уступают методу гиперболического уравнения, см. § 13.

Конкретная реализация каждого из обсуждаемых методов происходит в два этапа. Сначала строится явное, достаточно точное приближение к оператору $\varphi(A, z)$ (при этом используется соответствующее дифференциальное уравнение) и находится асимптотика функции $\Phi(A, z)$. После этого применяется подходящая тауберова теорема.

12.1. Резольвентный метод. Резольвентный метод использует функции $\varphi(\lambda, z)=(\lambda^l-z)^{-1}$ или $\varphi(\lambda, z)=(\lambda-z)^{-l}$. Целое положительное число l выбирается так, чтобы оператор $\varphi(A, z)$ был ядерным. В частности, если A — оператор регулярной эллиптической краевой задачи в области $X\subset\mathbf{R}^n$, то берут $\varphi=(\lambda^l-z)^{-1}$ при $ml>n$, $m=\operatorname{ord} A$. Ниже для упрощения записи считаем, что $m>n$, так что можно принять $l=1$.

Пусть $G(z;\ x, y)$ — функция Грина оператора A, т. е. ядро резольвенты $(A-zI)^{-1}$. В обсуждаемых условиях G — непрерывная функция, и в соответствии с (1.17) в скалярном случае

$$\Phi(A, z)=\operatorname{Tr}(A-zI)^{-1})=\int_X G(z;\ x, x)\,dx. \tag{12.1}$$

Тем самым дело сводится к исследованию асимптотики функции Грина при больших $|z|$. Чтобы получить первое приближение к $G(z;\ x, y)$, прибегают к процедуре «замораживания коэффициентов»: в д. в. $A(x, D)$ отбрасывают младшие члены, фиксируют точку $x_0\in X$ и с помощью преобразования Фурье решают уравнение с постоянными коэффициентами $A^0(x_0, D)u-zu=f$ во всем пространстве $\mathbf{R}^n$. Это дает

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int\int(A^0(x_0, \xi)-z)^{-1} f(y)\, e^{i\xi\cdot(x-y)}dy\,d\xi.$$

Затем коэффициенты «размораживаются», и в качестве приближения к $G(z;\ x, y)$ берется ядро

$$G_0(z;\ x, y)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}(A^0(x, \xi)-z)^{-1}e^{i\xi\cdot(x-y)}d\xi. \tag{12.2}$$

В регулярном случае этого приближения оказывается достаточно для нахождения требуемой асимптотики. Погрешность $G-G_0$ оценивается с помощью сравнительно простых соображений, основанных на теоремах вложения Соболева (см. [169]). В результате для функции (12.1) — *преобразования Стильтьеса* меры $dN(\lambda; A)$:

$$\Phi(A, z)=(SN)(z)\overset{\text{def}}{=}\int(\lambda-z)^{-1}dN(\lambda;\ A) \tag{12.3}$$

получается степенная асимптотика

$$(SN)(z)\sim c\,(-z)^{n/m-1},\quad z\to-\infty.$$

Далее применяется тауберова теорема Харди—Литтлвуда (см. [99], [345]).

Теорема 12.1. Пусть $f(\lambda)$ — неотрицательная неубывающая функция на $\mathbf{R}^1$ и при $z\to-\infty$ $(Sf)(z)\sim(Sg)(z)$, где $g(\lambda)=c\lambda^\alpha$, $\alpha>0$. Тогда $f(\lambda)\sim g(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$.

Это рассуждение доказывает формулу (9.12)—(9.14′). Поскольку $G(z;\ x, x)$ является преобразованием Стилтьеса спектральной функции $e^A(\lambda;\ x, x)$, на этом пути получается также асимптотика (9.18), равномерная на компактах $K\subset X$.

Описанный способ вывода формул спектральной асимптотики был предложен Карлеманом [193] для операторов второго порядка. Впоследствии он был распространен в работах ряда авторов на более широкие классы операторов. Наиболее полный результат (и, пожалуй, наиболее прозрачное изложение) принадлежит Агмону [169].

Подходящая модификация оценок Агмона позволила распространить метод на операторы с не очень гладкими коэффициентами (см. обзор [24]) — впрочем, соответствующие условия все же более ограничительны, чем при использовании вариационного метода.

Описанная конструкция переносится также на операторы, эллиптические по Дуглису—Ниренбергу и краевые задачи для них — см. Грубб [239], [240], А. Н. Кожевников [75].

Практически эквивалентен резольвентному в задачах со степенной асимптотикой спектра подход, основанный на рассмотрении ζ-функции оператора A — *преобразования Меллина* функции $N(\lambda;\ A)$. Если A — положительный эллиптический д. о., то A^{-z} — ядерный оператор при $\mathrm{Re}\, z > n/m$. Зная степенную асимптотику функции $G(z;\ x, x)$, можно на основе (9.32) найти асимптотику функции $\zeta(A, z) = \mathrm{Tr}(A^{-z})$ при $z \to n/m$. Тауберова теорема Икехара позволяет восстановить по ней асимптотику $N(\lambda;\ A)$ (см. [162]). Подобным же образом ζ-функция применяется и в других задачах о главном члене асимптотики. Такое обращение к ζ-функции происходит обычно тогда, когда по каким-либо причинам затруднительно возведение в степень оператора A или его резольвенты.

При рассмотрении оператора Шрёдингера $A = -\Delta + V(x)$, $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, для получения требуемой оценки $G - G_0$ о потенциале V предполагается, что выполнено (2.21), $|\nabla V| = O\left(V^{\frac{3}{2}-\delta}\right)$, $\delta > 0$, (т. е. несколько бóльшая гладкость, чем в теореме (11.2), а также $V(x) = O\left(\exp\left(\frac{1}{2}|x - y|\sqrt{V(y)}\right)\right)$

Поскольку асимптотика уже, вообще говоря, не будет степенной, для оправдания вейлевской формулы (9.8) требуется распространить теорему 12.1 на нестепенные функции (и на ядра $(\lambda - z)^{-l}$, $l > 1$) в формуле вида (12.3); здесь целесообразно возводить в степень резольвенту, а не сам оператор A. Такое обобщение было получено М. В. Келдышем в 1951 г. Ниже приводится *теорема Келдыша* в форме, усовершенствованной Б. И. Коренблюмом. Мы используем обозначение

$$(S_r f)(z) = \int_0^\infty (\lambda - z)^{-r-1} df(\lambda).$$

Теорема 12.2 (см. [85]). Пусть $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — неотрицательные неубывающие функции, определенные при $\lambda > 0$ и равные нулю в окрестности точки $\lambda=0$, причем $f(\lambda)$ дифференцируема, $f(\lambda)\to\infty$ $(\lambda\to\infty)$, и при достаточно больших λ

$$\alpha f(\lambda)<\lambda f'(\lambda)<\beta f(\lambda);\ \alpha,\beta>0.$$

Тогда, если $(S_r f)(z)\sim(S_r g)(z)$, $z\to-\infty$, где r — целая часть β, то $f(\lambda)\sim g(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$.

На этом пути формула вейлевского типа доказывается для широкого класса операторов вида $A=A_0+A_1+V$, где A_0 — эллиптический оператор в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкими ограниченными коэффициентами, $V(x)$ — потенциал, неограниченно растущий на бесконечности, а оператор A_1, имеющий, возможно, неограниченные коэффициенты, в подходящем смысле мал по сравнению с A_0+V (см. [83]). Формула (9.10) для операторнозначного оператора Шрёдингера также доказывается с помощью изложенной методики [84].

При переходе к неполуограниченным операторам (примерами здесь могут служить оператор Дирака и неполуограниченные эллиптические системы), необходимо рассматривать резольвенту $(A-zI)^{-1}$ уже при комплексных z. Соответствующая двусторонняя тауберова теорема, обобщающая теорему 12.2 (см. [85, гл. X]), позволяет при выполнении ряда условий регулярности на меру μ на $\mathbf{R}^1$ находить асимптотику при $\lambda\to\infty$ функций $\mu((0,\lambda))$ и $\mu((-\lambda,0))$ по асимптотике преобразования Стилтьеса $\int(\lambda-z)^{-r-1}d\mu(\lambda)$ при $z\to\infty$ вдоль некоторого луча. Так доказываются формулы типа $(9.9_\pm)$, $(9.17_\pm)$ (см., в частности, [85]).

12.2. Случай невейлевской асимптотики спектра. В случае операторов с невейлевской асимптотикой спектра (см. § 10) требуется иной метод построения резольвенты, поскольку в таких задачах приближение к резольвенте вида (12.2) уже недостаточно точно.

Для задач, к которым применима схема, изложенная в п. 10.1, способ построения резольвенты также подсказывается этой схемой. Пусть оператор A имеет такую же асимптотику спектра, как д. о. (или п. д. о.) $\mathcal{A}$ на подмногообразии $\tilde{X}\subset X$ с символом $\mathcal{A}(y,\eta)$, $(y,\eta)\in T^*\tilde{X}$, где $\mathcal{A}(y,\eta)$ — оператор во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}(y,\eta)$. Тогда требуемое приближение к резольвенте дается п. д. о. на $\tilde{X}$ с операторным символом $(\mathcal{A}(y,\eta)-zI)^{-1}$ (этот факт обычно представляет собой наиболее технически сложный момент доказательства), и соответственно этому

$$\operatorname{Tr}(A-zI)^{-1}\sim\iint\limits_{T^*\tilde{X}}\operatorname{Tr}(\mathcal{A}(y,\eta)-zI)^{-1}\,dy\,d\eta. \tag{12.4}$$

Фактически операторный символ $\mathcal{A}(y,\eta)$ оказывается дифференциальным оператором достаточно простой структуры с полиномиальными (или степенными) коэффициентами в евклидовом пространстве, и нахождение асимптотики $\operatorname{Tr}(A-zI)^{-1}$ уже сравнительно просто: оно сводится к использованию различных свойств однородности операторного символа (см. [173], [287, I], [296, II), причем из формулы (12.4) автоматически вытекает различная форма результата для основного невейлевского и пограничного случаев.

Гораздо более тонкая техника построения резольвенты требуется при исследовании операторов, для которых не удается построить операторный п. д. о. $\mathscr{A}$. Таковы, например, гипоэллиптические операторы с кратными характеристиками, имеющие несимплектическое характеристическое многообразие (которое, тем самым, нельзя представить в виде $T^*\tilde{X}$). Полученные для таких операторов формулы спектральной асимптотики не укладываются в рамки (10.1), ($10.1_\pm$) см. [287 II], [296 II].

12.3. Уточнение асимптотических формул. Для регулярного эллиптического оператора можно получить и дальнейшие члены разложения $\operatorname{Tr}(A-zI)^{-l}$ по степеням z при $z\to\infty$ вдоль луча в комплексной области. Это делается совсем просто при отсутствии границы — асимптотический ряд для резольвенты получается применением элементарной процедуры последовательных приближений, начинающейся с ядра (12.2). Для краевой задачи нужно иметь также начальное приближение функции Грина вблизи границы. В иных терминах это отвечает возможности аналитического продолжения ζ-функции оператора A как мероморфной функции во всей комплексной плоскости с простыми полюсами на вещественной оси. Исследование этих полюсов проведено в [318], [319]. Обобщение на случай гипоэллиптических операторов проведено в [145], на операторы с вырождением на границе — в [73].

Эта дополнительная информация об асимптотике следа резольвенты не приводит, однако, к получению дальнейших членов асимптотики $N(\lambda; A)$. Дело в том, что функция $R(\lambda; A)=$ $=N(\lambda; A)-a_0\lambda^{n/m}$ не монотонна, поэтому к ее преобразованию Стилтьеса (хотя и имеющему степенную асимптотику) нельзя применить тауберову теорему 12.1 или ее обобщения.

Для того, чтобы получить оценку остатка для $N(\lambda; A)$, требуется изучать асимптотику $(A-zI)^{-1}$ в бо́льшей близости от спектра A — например, вдоль парабол $|\operatorname{Im} z|=(\operatorname{Re} z)^\gamma$, $\gamma<1$. Здесь применяется *тауберова теорема Плейеля—Малявэна* (см. [170]).

Теорема 12.3. Пусть $f(\lambda)\geqslant 0$ — неубывающая функция на полуоси $\mathbf{R}_+$, $(Sf)(z)$ — преобразование Стилтьеса меры df и Γ_λ — контур в $\mathbf{C}^1$, соединяющий точки $z_\pm=\lambda\pm i\mu$ и не пересекающий $\mathbf{R}_+$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\lambda}(Sf)(z)\,dz-f(\lambda)\right|\leqslant c\,|(Sf)(z_+)|.$$

Таким образом, чем ближе к спектру удается изучить асимптотику резольвенты, тем более точные результаты о распределении спектра получаются в итоге. С другой стороны, технические трудности, возникающие при построении резольвенты, растут с приближением к спектру (см. [170]). Найдя асимптотику резольвенты вдоль параболы $|\operatorname{Im} z| = (\operatorname{Re} z)^{1/m}$, Метивье [292] доказал для эллиптического оператора порядка m точную по порядку оценку остатка.

12.4. Метод параболического уравнения. Этот метод основан на исследовании величины

$$\theta_A(t) = \operatorname{Tr} e^{-At} = \sum_j e^{-t\lambda_j(A)} = \int e^{-t\lambda} dN(\lambda; A).$$

Функцию $\theta_A(t)$ принято называть *θ-функцией оператора A*. Она определена при всех $t>0$, коль скоро A — полуограниченный снизу с. с. оператор с дискретным спектром, для которого функция $N(\lambda; A)$ имеет не более, чем степенной рост. Это условие выполнено, в частности, для регулярных эллиптических операторов — в силу оценки (5.2). Оно выполнено также для оператора Шрёдингера с потенциалом $V(x) \geqslant c|x|^{\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ — в силу оценок (5.10), (5.11).

Если спектр A бесконечен, то, очевидно, $\theta_A(t) \to \infty$ при $t \to +0$. Допустим, что нам известна степенная асимптотика

$$\theta_A(t) \sim ct^{-\gamma}, \quad t \to +0. \tag{12.5}$$

Асимптотика функции $N(\lambda; A)$ выводится из соотношений типа (12.5) с помощью следующей теоремы.

Теорема 12.4 (*тауберова теорема Карамата*, см. [342]). Пусть $f(\lambda)$ — неубывающая неотрицательная функция на $\mathbf{R}_+$ не более чем степенного роста, и пусть при $t \to +0$ имеет место асимптотика

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} df(\lambda) \sim ct^{-\gamma}, \quad \gamma>0, \quad t \to +0.$$

Тогда $f(\lambda) \sim c(\Gamma(\gamma+1))^{-1}\lambda^{\gamma}$, $\lambda \to +\infty$.

Пусть, например, $A = A(x, D)$ — полуограниченный с. с. эллиптический оператор на вектор-функциях размерности k в ограниченной области $X \subset \mathbf{R}^n$. Теорема 12.4 сводит задачу нахождения главного члена асимптотики функции $N(\lambda; A)$ при $\lambda \to \infty$ к отысканию асимптотики при $t \to +0$ функции

$$\theta_A(t) = \operatorname{Tr} U(t) = \int_X \operatorname{tr} U(t; x, x)\, dx.$$

Здесь $U(t; x, y)$ — функция Грина параболического уравнения (системы)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x, D) u = 0, \tag{12.6}$$

и $\operatorname{tr} U$ — след матрицы U как оператора в $\mathbf{C}^k$. Более того, применяя теорему 12.4 к функции $f(\lambda)=\operatorname{tr} e^A(\lambda; x, x)$, где $e_A(\lambda; x, y)$ — спектральная функция оператора A, можно найти ее асимптотику при $\lambda\to+\infty$ по асимптотике $U(t; x, x)$ при $t\to+0$.

Аналогично п. 12.1, в регулярных ситуациях достаточно точное приближение к $U(t; x, y)$ получается при замораживании коэффициентов. Фиксируем $x_0 \in X$. Пусть $U^{x_0}(t; x, y)$ — фундаментальное решение задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A^0(x_0, D)\,u=0. \tag{12.7}$$

Матрица-функция U^{x_0} допускает явное представление

$$U^{x_0}(t; x, y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot(x-y)}\exp\left(-tA^0(x_0, \xi)\right)d\xi. \tag{12.8}$$

Во многих случаях (например, для всех регулярных задач) матрица $U_0(t; x, y)=U^y(t; x, y)$ является уже достаточно хорошим приближением к $U(t; x, y)$. Применение теоремы 12.4 дает тогда вейлевскую асимптотику $N(\lambda; A)$ и $e^A(\lambda; x, x)$ на компактах в X.

Для оператора Шрёдингера в качестве U_0 принимается фундаментальное решение параболического уравнения с замороженным полным символом. На потенциал V накладываются те же условия, что и при применении резольвентного метода. Тауберова теорема 12.4, обобщенная подходящим образом на нестепенные функции, приводит тогда к доказательству вейлевской формулы (9.8) (см. [83]).

Другая модификация обсуждаемого метода, предложенная Мениковым и Шёстрандом [287], позволила получить асимптотику спектра гипоэллиптических операторов с двойными характеристиками, см. пример 10.3, однако без условия симплектичности характеристического многообразия. Ядро $U_0(t; x, y)$ строилось в виде интегрального оператора Фурье с комплексной фазовой функцией

$$U_0(t; x, y)=\int e^{i(\varphi(t; x,\xi)-\xi\cdot y)}a(t, x, \xi)\,d\xi.$$

Фаза φ выбирается специальным образом: она учитывает поведение двух старших символов оператора A в окрестности многообразия вырождения. Сходная техника применялась в [336] при исследовании оператора A с двойными характеристиками в пространстве вектор-функций, возникающего при сведении на границу области оператора Кона—Лапласа — см. п. 10.5.

Распространить метод параболического уравнения на случай характеристик кратности, большей двух, пока не удалось.

12.5. Полное асимптотическое разложение θ-функции. Вернемся к регулярному случаю. Исходя из «нулевого приближения» (12,8), нетрудно построить полное асимптотическое разложение функции Грина уравнения (12.6). Если $B^{x_0}=B^{x_0}(x, D)=A(x, D)-A^0(x_0, D)$, то из (12.6) и (12.7) следует соотношение

$$U(t; x, y)=U_0(t; x, y)+$$

$$+\int_0^t\int_X U(s; x, z)B^y(z, D_z)U_0(t-s; z, y)\,ds\,dz=U_0+U*\Phi,$$

где $*$ — свертка по s, z, а $\Phi=B^y(z, D_z)U_0(s; z, y)$. Итерируя, получаем формальную сумму

$$U=U_0+\sum_{k\geq 1}U_0*\underbrace{\Phi*\ldots*\Phi}_{k}. \tag{12.9}$$

Это разложение фактически сходится к $U(t; x, y)$ равномерно на компактах в $\bar{\mathbb{R}}_+\times X\times X$, а также является асимптотическим при $t\to+0$ — см. [285], [295].

Если A — эллиптический оператор на компактном многообразии X без края, то начальное приближение U_0 к фундаментальному решению можно построить, сшивая с помощью разложения единицы на X ядра вида (12.8), найденные для отдельных координатных окрестностей. После этого, как и выше, для $U(t; x, y)$ получается разложение (12.9).

Главный член асимптотики *локальной* θ*-функции* $\theta_A(t, x)\overset{\mathrm{def}}{=}\overset{\mathrm{def}}{=}\operatorname{tr}U(t; x, x)$, как легко следует из (12.8), имеет вид

$$\theta_A(t, x)\sim\Gamma\left(\frac{m}{n}+1\right)(2\pi)^{-n}t^{-n/m}\omega_0(x),\quad t\to+0,$$

где $\omega_0(x)$ определено в (9.14).

Иными словами, главный член асимптотики $\theta_A(t)$ получается интегрированием по X плотности, являющейся локальной характеристикой оператора. Этот результат может быть существенно уточнен.

Теорема 12.5 (Минакшисундарам—Плейель). Функция $\theta_A(t)$ допускает разложение в асимптотический ряд

$$\theta_A(t)\sim(2\pi)^{-n}t^{-n/m}\sum_{j=0}^{\infty}a_{2j}t^{2j/m},\quad t\to+0, \tag{12.10}$$

причем $a_{2j}=\int_X\omega_{2j}(x)\,dx$, где $\omega_{2j}(x)$ выражается через значений в точке x коэффициентов оператора A и их производных вплоть до порядка $4j$.

Формула (12.10) выводится из разложения (12.9), исходя из явного представления (12.8).

В случае оператора A, действующего на многообразии X с краем, в правой части (12.10) следует добавить еще один аналогичный ряд, определяемый граничными условиями для A (см. [295]; в [238] дано обобщение на случай операторов в расслоениях). После такой модификации разложение функции Грина будет сходиться равномерно на компактах в $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{X} \times \bar{X}$. Теорема 12.5 обобщается на краевые задачи следующим образом.

Теорема 12.6. Для регулярного эллиптического оператора A на многообразии X с краем функция $\theta_A(t)$ при $t \to +0$ допускает разложение в асимптотический ряд

$$\theta_A(t) \sim (2\pi)^{-n} t^{-n/m} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} t^{2j/m} + t^{-n/m} \sum_{j=1}^{\infty} b_j t^{j/m}, \qquad (12.11)$$

где коэффициенты a_{2j} — те же, что в (12.10), а b_j — интегралы по ∂X от плотностей, выражающихся через коэффициенты дифференциального выражения и краевых условий и их производные вплоть до порядка $2j$.

Разложения (12.10), (12.11), называемые *разложениями Минакшисундарама—Плейеля* (М.—П.), не обеспечивают существования даже второго члена асимптотики $N(\lambda; A)$. Тем не менее, коэффициенты a_{2j}, b_j являются важными характеристиками распределения спектра и представляют собой самостоятельный объект исследования.

12.6. Спектральная геометрия. Мы ограничимся далее операторами второго порядка. Пусть A — оператор Лапласа—Бельтрами на римановом многообразии X без края (см. пример 2.2). Плотности ω_{2j} в локальных координатах выражаются через компоненты метрического тензора $g = \{g_{ik}\}$ и его производные. Таким образом, формула (12.10) устанавливает связь между спектральными, т. е. глобальными характеристиками A и локальными геометрическими характеристиками многообразия. Формула (12.11) выполняет такую же роль в случае оператора Лапласа—Бельтрами на многообразии с краем, для определенности, с условием Дирихле на ∂X. Отыскание явного выражения коэффициентов a_{2j}, b_j для этих операторов, а также для других естественно возникающих эллиптических операторов на римановом многообразии составляет предмет спектральной геометрии.

В принципе любое количество коэффициентов М. — П. может быть найдено, исходя из разложения (12.9) (и его аналога для случая краевых задач). Первый член разложения, a_0, пропорционален риманову объему многообразия X. Далее, $b_1 = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} S$, где S — $(n-1)$-мерный объем ∂X в индуцированной с X римановой метрике, знак «+» отвечает задаче Неймана, а «—» — задаче

Дирихле. Далее,

$$a_2 = -\frac{1}{3}\int\limits_X K(x)\,dx, \quad b_2 = -\frac{1}{6}\int\limits_{\partial X} J(x)\,dS,$$

где $K(x)$ — скалярная кривизна X в точке $x \in X$, $J(x)$ — средняя кривизна границы, т. е. удвоенный след второй фундаментальной формы границы.

12.7. Вычисление коэффициентов. В работах Патоди [307] и Джилки [235] был разработан алгебраический подход к вычислению плотностей $\omega_j(x)$ и коэффициентов a_j, b_j, позволивший за счет учета априорных свойств однородности и симметрии $\omega_j(x)$ существенно упростить процесс вычисления.

Рассмотрим разложение (12.10) для оператора Лапласа—Бельтрами на многообразии X без края. Фиксируем полугеодезические координаты $\{y^\mu\}$ в окрестности $x_0 \in X$ так, что $g_{ik}(x_0) = \delta_{ik}$. Тогда, согласно теореме Картана, разложение Тейлора метрического тензора в окрестности x_0 имеет вид

$$g(y) = \{g_{ik}(y)\} = \delta_{ik} + g^{(1)} + g^{(2)} + \ldots, \tag{12.12}$$

где $g^{(j)}$ — универсальные полиномы степени j от координат y и компонент тензора кривизны $R = R^i{}_{\mu\nu k}$ и их ковариантных производных в точке x_0. Универсальность здесь понимается в том смысле, что вид этих полиномов одинаков для всех многообразий, всех размерностей и всех систем координат. В частности,

$$g^{(1)}_{ik} = \frac{2}{3}\sum_{\mu,\nu} y^\mu y^\nu R_{i\mu\nu k}.$$

Анализ разложения (12.10) после подстановки туда (12.12) показывает, что коэффициенты $\omega_j(x_0)$ должны также быть универсальными полиномами от $R(x_0)$ и ковариантных производных R:

$$\omega_j(x_0) = Q_j(R(x_0),\ R'(x_0),\ \ldots) \tag{12.13}$$

Далее из однородности плотностей $\omega_j(x_0)$ при преобразовании метрики $g \mapsto sg$ выводится, что полином Q_j в (12.13) должен быть однородным порядка $2j$, если ковариантной производной R порядка l приписать степень $2+l$. Наконец, следует воспользоваться тем фактом, что плотность $\omega_j(x_0)$ не должна меняться при действии ортогональных преобразований, переводящих друг в друга различные системы полугеодезических координат с центром в x_0. Согласно теореме Г. Вейля об инвариантах ортогональной группы, каждый инвариантный полином (12.13) обязательно является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами элементарных однородных $O(n)$-инвариантных слагаемых, имеющих вид

$$m(R) = {\sum}' R_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_r},$$

где для мультииндекса α длины $q \geqslant 4$ через $R_\alpha = R_{\alpha^1 \ldots \alpha^4, \alpha^5 \ldots \alpha^q}$ обозначены компоненты ковариантной производной порядка $q-4$

ковариантного тензора кривизны, а знак Σ' обозначает свертывание по всем индексам.

В итоге, отыскание плотностей $\omega_j(x)$ сводится к алгебраической задаче перечисления всех элементарных слагаемых с заданной степенью однородности, а также к отысканию постоянных коэффициентов при этих слагаемых. Последняя задача, с учетом универсальности искомых коэффициентов, решается путем рассмотрения достаточного количества геометрически простых примеров, в которых эти коэффициенты находятся явно.

Такая программа была последовательно проведена в [307] для случая оператора Лапласа—Бельтрами на многообразиях без края и с краем, а далее в [235] — для оператора Лапласа на p-формах. После этого Джилки и Смит [236], [333] распространили изложенную методику на операторы второго порядка, действующие на сечениях векторного расслоения на многообразии с краем или без края, при условии, что главная часть оператора совпадает с $-\Delta$. В частности, для последней задачи были вычислены и выражены в геометрических терминах коэффициенты a_2, a_4, a_6. Следует впрочем, отметить, что здесь уже для a_6 соответствующее пространство однородных инвариантных полиномов имеет (при больших n) размерность 46, так что весьма быстро мы приходим к необозримым вычислительным сложностям.

12.8. Проблема восстановления метрики по спектру. Приведем для случая оператора Лапласа на p-формах на n-мерном многообразии X без края формулы для a_0, a_2, a_4:

$$a_0=\binom{n}{p}\operatorname{Vol} X;$$

$$a_2=\int\limits_X\left(\frac{1}{6}\binom{n}{p}-\binom{n-2}{p-1}\right)K(x)\,dx;$$

$$a_4=\int\limits_X(C_1K^2+C_2|E|^2+C_3|R|^2)\,dx,$$

где коэффициенты C_1, C_2, C_3 зависят от n, p; $R=R^i_{\mu\nu k}$ — тензор кривизны, E — кривизна Риччи, $E_{\mu\nu}=R^i_{\mu i\nu}$ и K — скалярная кривизна (см. [187]). Изучение этих величин позволяет в некоторых случаях решить вопрос о характеризации многообразия спектром. В частности, по спектру можно решить, является ли многообразие плоским, эйнштейновым, кэлеровым и т. д. По этому поводу см. книгу [187] а также более поздние обзоры [186], [235], [332].

С этим кругом вопросов связана следующая проблема: в какой мере риманово многообразие X определяется спектром соответствующего оператора Лапласа — Бельтрами? Следует сразу отметить, что в общем случае даже все коэффициенты a_j, как и вообще любой набор интегралов от локальных плотностей, не может однозначно определить многообразие. Пусть, например, X диффеоморфно сфере S^n и метрика многообразия $X = X_{\gamma\gamma'}$ имеет вид $g(x) = g_0(x)(1+\varphi(\gamma x)+\varphi(\gamma' x))$, где $\varphi(x)$ — некоторая гладкая функция с достаточно малым носителем, g_0 — стандартная метрика S^n а γ, γ' — два элемента группы $O(n+1)$ изометрий S^n. Если носители функций $\varphi(\gamma x)$, $\varphi(\gamma' x)$ не пересекаются, то интегралы от любых локальных плотностей по X не зависят от γ, γ' (это рассуждение принадлежит С. А. Молчанову [115]).

С другой стороны, некоторые многообразия специального вида, отвечающие экстремальным значениям коэффициентов a_j или их линейных комбинаций, характеризуются этими коэффициентами однозначно. Так, если коэффициенты a_0, a_2, a_4 у многообразия X для оператора Лапласа на функциях и на p-формах такие же, как у S^n, то X изометрично S^n. Неизвестно, характеризуется ли S^n спектром — Δ только на функциях при $n > 7$, однако при таких n сфера однозначно определяется спектром —Δ на p-формах, $p = [n/3]$ (см. [341]).

Стандартная метрика S^n и других компактных пространств постоянной положительной кривизны *спектрально изолирована*: если метрика g достаточно близка к g_0 и у соответствующего оператора Лапласа на функциях спектр или хотя бы коэффициенты a_0, a_2, a_4 такие же, как для S^n, то $g = g_0$. Отсюда следует, что такие пространства *спектрально жесткие*: для них отсутствуют нетривиальные деформации метрики, сохраняющие спектр — *изоспектральные деформации*. Также спектрально жестки и пространства постоянной нулевой и отрицательной кривизны [241], [255], [340]. Примеры линзовых пространств [256], [257] (см. § 16) показывают, что *изоспектральные*, т. е. имеющие одинаковый спектр, спектрально изолированные многообразия могут не быть изометричны (и даже диффеоморфны).

12.9. Связь с теорией вероятностей. Опишем в заключение вероятностную трактовку параболического уравнения второго порядка и связанный с ней подход к исследованию $\theta(t)$.

Для диффузионного процесса Z_t на гладком многообразии X, исчезающего на ∂X (см. [115]), вводится характеристический оператор A:

$$(Af)(x) = \lim_{V \to x} \frac{Ef\left(Z_{\tau_V}\right) - f(x)}{E\tau_V},$$

где E — математическое ожидание, V — окрестность точки x, сжимающаяся к x, τ_V — момент первого выхода из V процесса с началом в x. Оператор A оказывается (см. [115]) дифференциальным оператором второго порядка; его старшие коэффициенты задают на X риманову метрику, а сам оператор A принимает вид $A = 1/2\Delta + \varphi$, где Δ — оператор Лапласа—Бельтрами на X, φ — некоторая гладкая функция. Обратно, каждому риманову многообразию X можно сопоставить диффузионный процесс, для которого характеристический оператор A равен $\Delta/2$.

Переходная плотность $p(t;\ x,\ y)$ процесса Z_t удовлетворяет параболическому уравнению

$$\partial p/\partial t - Ap = 0,\ p|_{\partial X} = 0,\ p(0) = \delta. \qquad (12.14)$$

В частности, $p(t;\ x,\ x)$ отвечает плотности вероятности возвращения процесса Z за время t в исходную точку x.

Вероятностными методами уравнение (12.14) и, в особенности, асимптотика $p(t;\ x,\ y)$ при $t \to 0$ изучались в [266], [267], [277]; наиболее продвинутые результаты в этом отношении см. в [115], где, в частности, для двумерного многообразия с краем предложен способ вычисления всех коэффициентов разложения $p(t;\ x,\ x)$, дающий коэффициенты разложения $\theta_A(t)$ вплоть до b_5. Модификация этого подхода в трехмерном случае дает коэффициенты вплоть до a_4, b_4. В [324] с помощью вероятностного метода найдена асимптотика невейлевского типа для оператора Шрёдингера $-\Delta + |x|^\alpha |y|^\beta$ в $\mathbf{R}^2$.

§ 13. Метод гиперболического уравнения

В задачах, связанных с исследованием тонких асимптотических свойств спектра, наиболее эффективным оказался метод гиперболического уравнения. В последние годы с его помощью получен ряд важных результатов о точных по порядку оценках остатка и о втором члене спектральной асимптотики, а также о связи асимптотических свойств спектра с геометрией бихарактеристик; последнему вопросу посвящен § 14.

Как уже отмечалось, этот метод распространяется и на некоторые неполуограниченные операторы. Обычно для неполуограниченного оператора A вводят проекторы $E_{\pm}^{A} = E^{\pm A}(0, \infty)$ на положительное и отрицательное собственные подпространства и рассматривают A в каждом из этих подпространств в отдельности. Метод волнового уравнения удается применить, когда проекторы $E_{\pm}^{A}$ «хорошо» устроены (например, являются псевдодифференциальными операторами). Мы не будем останавливаться на этом подробнее и для простоты всегда будем считать, что $A \geqslant \mathrm{const} \cdot I$.

13.1. Тауберова теорема для преобразования Фурье. В обсуждаемом методе используются различные тауберовы теоремы для преобразования Фурье. Приведем одну из них — для случая экспоненциального преобразования; для других видов преобразований результаты аналогичны. Данная формулировка взята из [138]; она уточняет рассуждения, встретившиеся в [68], [96], [162], [250].

Пусть $Z(\lambda)$ — неубывающая функция степенного роста на $\mathbf{R}^1$. Обозначим через $h(t)$ *преобразование Фурье меры* $dZ(\lambda)$:

$$S'(\mathbf{R}^1)\ni h(t)=\int e^{-i\lambda t}dZ(\lambda).$$

Зафиксируем вещественную четную функцию $\tilde{\rho}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\tilde{\rho}(0)=1$, $\tilde{\rho}(\tau)\geqslant 0$, $\tilde{\rho}(0)>0$, и положим $\tilde{\rho}_T(t)=\tilde{\rho}(t/T)$. Рассмотрим свертку

$$(\tilde{\rho}*dZ)(\lambda)=(\tilde{\rho}h)(\lambda)=(2\pi)^{-1}\int e^{i\lambda t}\tilde{\rho}(t)h(t)\,dt.$$

В силу полиномиальной ограниченности функции $E(\lambda)$, для некоторого $\varkappa>0$

$$(\tilde{\rho}*dZ)(\lambda)\leqslant c(|\lambda|^\varkappa+1). \tag{13.1}$$

Поведение свертки $\tilde{\rho}*dZ$ при $\lambda\to+\infty$ определяется особенностями обобщенной функции $h(t)$ на носителе $\tilde{\rho}$. Поскольку $(\tilde{\rho}*dZ)(\lambda)=(\tilde{\rho}*Z)'(\lambda)$, эти особенности задают также асимптотику свертки $\tilde{\rho}*Z$ с точностью до $O(1)$. Тауберова теорема, в свою очередь, позволяет получить отсюда асимптотику $Z(\lambda)$.

Теорема 13.1. Пусть $\varkappa>0$ и выполнено (13.1). Тогда для каждого $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho}_T*Z)(\lambda-\varepsilon)-c(\varepsilon^{-1}T^{-1}|\lambda|^\varkappa+1)\leqslant Z(\lambda)\leqslant\\ \leqslant(\tilde{\rho}_T*Z)(\lambda+\varepsilon)+c(\varepsilon^{-1}T^{-1}|\lambda|^\varkappa+1),\end{aligned} \tag{13.2}$$

где константа зависит только от $\varkappa$ и от функции ρ.

В силу (13.1), из (13.2) с $T=1$ следует, что

$$Z(\lambda)=(\tilde{\rho}*Z)(\lambda)+O(\lambda^\varkappa),\quad \lambda\to+\infty. \tag{13.3}$$

Таким образом, зная особенности обобщенной функции $h(t)$ в окрестности точки $t=0$, можно сразу определить асимптотику $Z(\lambda)$ с точностью до $O(\lambda^\varkappa)$. Если известны особенности обобщенной функции $h(t)$ при всех t, то, устремляя в (13.2) T к $+\infty$, можно надеяться получить асимптотическую формулу с остатком $o(\lambda^\varkappa)$. «Младшими» особенностями, дающими в $(\tilde{\rho}_T*Z)(\lambda)$ вклад $o(\lambda^\varkappa)$, при этом можно пренебречь.

Дальнейшее уточнение асимптотики $Z(\lambda)$ требует сведений не только об особенностях $h(t)$, но и о поведении $h(t)$ при $t\to\infty$ (см. [45]).

При вычислении асимптотики спектра с. с. д. о. A в качестве $Z(\lambda)$ выступает обычно величина $N(\lambda^m; A)=N(\lambda; B)$, где $m=\operatorname{ord}A$, $B=A^{1/m}$; в более сложных ситуациях — величина $N_\Gamma(\lambda; B)=\operatorname{Tr}(E^B(-\infty,\lambda)\Gamma)$, где Γ — подходящим образом выбранный ограниченный оператор. При вычислении асимптотики спектральной функции чаще всего принимают $Z(\lambda)=$ $=e^B(\lambda; x, x)$. В этих случаях, как правило, $\varkappa=n-1$.

Положим $U(t)=\exp(-itB)$; ядром этого оператора является функция Грина $U(t;x,y)$ задачи Коши

$$u_t+iBu=0,\quad u(0)=u_0. \tag{13.4}$$

Функция $U_\Gamma(t)=U(t)\Gamma$ — решение операторного уравнения

$$\frac{dU_\Gamma}{dt}+iBU_\Gamma=0,\quad U_\Gamma(0)=\Gamma.$$

Если B — оператор с дискретным спектром и $P(\lambda)$, $\lambda\in\sigma(B)$, — ортопроекторы на его собственные подпространства, то (см. пример 1.1)

$$U_\Gamma(t)=\sum_{\lambda\in\sigma(B)}\exp(-i\lambda t)P(\lambda)\Gamma,$$

поэтому оператор

$$B_\rho=\int\rho(t)U_\Gamma(t)\,dt=\sum_{\lambda\in\sigma(B)}\tilde\rho(\lambda)P(\lambda)\Gamma$$

будет ядерным, коль скоро функция $\tilde\rho$ достаточно быстро убывает, а собственные значения B растут не слишком медленно (достаточно, в частности, чтобы абсолютно сходился ряд $\sum\limits_{\lambda\in\sigma(B)}\tilde\rho(\lambda)$). Если, например, A — регулярный эллиптический оператор и $B=A^{1/m}$, то так будет для любой функции $\tilde\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$.

Таким образом, функционал $\rho\mapsto\operatorname{Tr}B_\rho$ задает обобщенную функцию σ_Γ на $\mathbf{R}^1$; ее естественно трактовать как след оператора $U_\Gamma(t)$:

$$\sigma_\Gamma(t)=\operatorname{Tr}U_\Gamma(t).$$

Она является преобразованием Фурье меры $dE(\lambda)=d(\operatorname{Tr}E^B(\lambda)\Gamma)$. Аналогичным образом, ядро Шварца $U(t;x,y)$ оператора $U(t)$ является преобразование Фурье (комплексной) меры $de(\lambda)=d_\lambda e^B(\lambda;x,y)$. Поэтому для построения асимптотики функций $N_\Gamma(\lambda)$ и $e^B(\lambda;x,x)$ достаточно изучить особенности обобщенных функций $\sigma_\Gamma(t)$ и $U(t;x,x)$ (при фиксированном x).

Такой подход приводит к цели лишь в случае, если уравнение (13.4) оказывается в подходящем смысле гиперболическим. Тогда особенности решений распространяются достаточно регулярно, с конечной скоростью, и через них удается эффективно описать особенности $\sigma_\Gamma(t)$ и $U(t;x,x)$. Эти функции имеют изолированную особенность при $t=0$. Вычисления показывают, что эта особенность является степенной, и в обоих случаях

$$(\tilde\rho*Z)(\lambda)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}), \tag{13.5}$$

когда $\tilde\rho$ имеет достаточно малый носитель. Теперь из (13.3) сразу получается одночленная асимптотика с точной оценкой остатка

$$Z(\lambda)=c_0\lambda^n+O(\lambda^{n-1}),\ \lambda\to+\infty.$$

Если ненулевые особенности функций $\sigma_\Gamma(t)$ и $U(t;x,x)$ «слабее», чем особенность в нуле, то (13.5) выполнено и для $(\tilde{\rho}_T * Z)(\lambda)$ при всех $T>1$. В этом случае (13.2) дает (при $T\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon T\to+\infty$) двучленную асимптотику

$$Z(\lambda)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}),\ \lambda\to+\infty$$

Переход от оператора A к оператору $B=A^{1/m}$ как раз и служит для обеспечения гиперболичности.

Пример 13.1. Пусть A — оператор $-d^2/dx^2$ на окружности S^1. Функция $\operatorname{Tr}\exp(-itA)=\sum_n \exp(-itn^2)$ — модулярная функция (см. [322]), и ее особенности заполняют $\mathbf{R}^1$. В то же время функция $\operatorname{Tr}\exp(-itA^{1/2})=\sum_n \exp(-it|n|)$ (см. (14.1)) имеет особенности лишь в точках $2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

В ряде случаев оказывается более удобным рассматривать вместо (13.5) другое гиперболическое уравнение, связанное с оператором A. В частности, для дифференциального оператора A второго порядка естественно исходить из волнового уравнения

$$\frac{d^2U_\Gamma}{dt^2}+AU_\Gamma=0,\quad U_\Gamma(0)=\Gamma,\quad \dot{U}_\Gamma(0)=0. \tag{13.6}$$

Его решение есть $U_\Gamma(t)=\cos(tA^{1/2})\Gamma$, что отвечает косинус-преобразованию Фурье спектральной функции.[1] Преимущество (13.6) по сравнению с (13.4) состоит в том, что задача (13.6) — дифференциальная, в то время как оператор $B=A^{1/2}$ уже дифференциальным не является, что (в особенности, для многообразий с краем) вызывает определенные трудности.

13.2. Схема метода. Метод гиперболического уравнения впервые был применен Б. М. Левитаном [95] при получении оценки остатка вида

$$e^A(\lambda;x,x)-\omega_0(x)\lambda^{n/2}=O(\lambda^{(n-1)/2}) \tag{13.7}$$

для спектральной функции эллиптического оператора A второго порядка в области $X\subset\mathbf{R}^n$. Оценка (13.7) теряет равномерность при приближении точки x к границе. В то же время для оператора на компактном многообразии X без края оценка (13.7) становится равномерной по $x\in X$ и, интегрируя ее, можно получить оценку вида (9.20) в асимптотике $N(\lambda;A)$.

В [95] функция Грина $U(t;x,y)$ уравнения (13.6) строилась с помощью метода Адамара при малых t. При этом использовался тот непосредственно вытекающий из свойства конечной

[1] В работах В. Я. Иврия (см. [260]) используется синус-преобразоваиие Фурье.

скорости распространения факт, что при $|t|<cd(y)$ (где $d(y)=\operatorname{dist}(y, \partial X)$, c — константа эллиптичности оператора A), функция Грина $U(t; x, y)$ «не ощущает границы», т. е. совпадает с фундаментальным решением задачи (13.6) во всем пространстве.

Далее Хёрмандер [250] рассмотрел случай скалярного эллиптического д. о. A произвольного порядка m. Пусть сначала X — компактное многообразие без края. Рассмотрим уравнение (13.5) при $B=A^{1/m}$, $\Gamma=I$. Оператор B — псевдодифференциальный, первого порядка (см. [65], [342], [346]). Пусть $V\subset X$ — какая-либо координатная окрестность. На функции с носителем в V оператор B действует (в локальных координатах) как

$$(Bu)(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}(1-\vartheta(\xi))e^{i\xi\cdot(x-y)}B(x, \xi)\tilde{u}(\xi)\,d\xi+(Tu)(x).$$

Здесь T — *сглаживающий оператор*, т. е. интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром. Символ $B(x, \xi)$ разлагается в асимптотический ряд

$$B(x, \xi)\sim B_1(x, \xi)+B_0(x, \xi)+B_{-1}(x, \xi)+\ldots, \tag{13.8}$$

причем слагаемое B_j, $j=1, 0, -1, \ldots$, принадлежит пространству O_j функций, положительно однородных по ξ степени j, а функция $\vartheta\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ равна единице в окрестности нуля. Разложение (13.8) при переходе к другой локальной системе координат изменяется, однако главный символ B_1 (как и в случае дифференциальных операторов) инвариантен как функция на T^*X. Для нашего оператора $B=A^{1/m}$ главный символ равен $B_1(x, \xi)=(A_m(x, \xi))^{1/m}$.

Фундаментальное решение уравнения (13.4) строится с помощью *интегральных операторов Фурье*. Пусть Γ — оператор умножения на функцию $\varphi\in C^\infty(X)$ с малым носителем. Будем искать ядро $U_\Gamma(t; x, y)$ оператора $U_\Gamma(t)$ при малых t в виде осциллирующего интеграла

$$U_\Gamma(t; x, y)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(\Phi(t,x,\theta)-\theta\cdot y)}q(t, x, y, \theta)(1-\vartheta(\theta))\,d\theta, \tag{13.9}$$

$\theta\in\mathbf{R}^n$, с функцией $q(t, x, y, \theta)$ — *амплитудой*, допускающей разложение в асимптотический ряд

$$q\sim q_0+q_{-1}+q_{-2}+\ldots,$$

$q_j\in O_j$, и вещественной *фазовой функцией* $\Phi(t, x, \theta)-\theta\cdot y\in O_1$. Здесь предполагается, что переменная x меняется в малой окрестности носителя функции φ и что по переменным x и y выбрана одна и та же система координат. Интеграл (13.9), вообще говоря, расходится. Однако, при некоторых условиях невырожденности его можно интерпретировать как обобщенную функцию на $X\times X$, зависящую от t как от параметра. Мы потребуем, чтобы в результате формальной подстановки выражения (13.9) в уравнение (13.4) все однородные слагаемые обратились в нуль. Это обеспечит нам, в конечном итоге, что U_Γ $(t; x, y)$ будет отличаться от функции Грина на гладкое слагаемое, чего для наших целей достаточно. Для вычисления результата подстановки следует воспользоваться формулами (см. [113], [342], [346]), описывающими действие п. д. о. на быстро осциллирующую экспоненту. Мы приведем лишь два первых члена соответствующего асимптотического разложения:

$$e^{-i\psi(x)\tau}B(x, D_x)(e^{i\psi(x)\tau}g(x)) \sim B_1(x, \nabla\psi)g(x)\tau + \\ +(\mathcal{L}(x, D_x)+H(x))g+O(\tau^{-1}), \quad \tau\to\infty, \tag{13.10}$$

где

$$\mathcal{L}g=\sum_{|\alpha|=1} B_1^{(\alpha)}(x, \nabla\psi)D_x^\alpha g,$$

$$H=B_0(x, \nabla\psi)+i\sum_{|\alpha|=2} B_1^{(\alpha)}(x, \nabla\psi)\frac{D_x^\alpha\psi}{\alpha!}, \quad B_1^{(\alpha)}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha B_1.$$

Итак, подставляя (13.9) в уравнение (13.4) и приравнивая в получившемся разложении вида (13.10) однородные члены к нулю, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+B_1\left(x, \frac{d\Phi}{\partial x}\right)=0 \tag{13.11}$$

и

$$\frac{\partial q_0}{dt}+\mathcal{L}q_0+Hq_0=0. \tag{13.12}$$

Первое из них называется *уравнением эйконала*, второе — *уравнением переноса*. Используя младшие (не выписанные нами) члены разложения (13.10), можно получить уравнения переноса, аналогичные (13.12), но уже неоднородные, для символов q_{-1}, $q_{-2}\dots$ Начальные условия для уравнений (13.11), (13.12) необходимо задать так, чтобы $U_\Gamma(0)=\Gamma$ с точностью до оператора с бесконечно гладким ядром. Удобно, например, принять

$$\Phi(0, x, y, \theta)=(x, \theta); \quad q_0(0, x, y, \theta)=\varphi(y); \\ q_j(0, x, y, \theta)=0, \quad j<0.$$

Тогда $U(0; x, y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi\cdot(x-y)}\varphi(y)(1-\vartheta(\theta))\,d\theta=\varphi(y)\delta(x-y)$ с точностью до C^∞-функции.

Уравнение (13.11) решается с помощью метода Гамильтона—Якоби. При фиксированных y, θ рассмотрим *гамильтонову систему*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial B_1}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=-\frac{\partial B_1}{\partial x} \tag{13.13}$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $\xi(0)=\xi_0$. Интегральные кривые $x(t; x_0, \theta)$, $\xi(t; x_0, \theta)$ системы (13.13) в $T'X$ называются *бихарактеристиками* оператора B (а также оператора A и символов B_1, A_m). Рассмотрим поверхность $S_t=\{(x(t; x_0, \theta), \xi(t; x_0, \theta)), x_0 \in X\} \subset T'X$. При достаточно малых t поверхность S_t близка к $S_0=\{(x, \theta), x \in X\}$, и потому неособо проектируется на X (при естественной проекции $\pi: T'X \to X$). Таким образом, отображение

$$x_0 \mapsto x(t; x_0, \theta) \tag{13.14}$$

обратимо; обозначим $x_0=x_0^t(x)$. Тогда функция $\Phi(t, x, y)$ находится интегрированием вдоль бихарактеристики, выходящей из $x_0^t(x)$:

$$\Phi(t, x, \theta)=x_0^t(x, \theta).$$

При этом

$$\frac{\partial \Phi(t, x, \theta)}{\partial x}=\xi(t). \tag{13.15}$$

Далее, уравнение переноса (13.12), с учетом (13.15), преобразуется к виду

$$\frac{dq_0}{dt}=\frac{\partial q_0}{\partial t}+\frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial q_0}{\partial x}=Hq_0,$$

и, таким образом, оно решается в явном виде с помощью интегрирования вдоль бихарактеристик. Аналогичным образом находятся при малых t решения и остальных уравнений переноса. Этим завершается формальное построение функции $U_\Gamma(t; x, y)$ при малых t в виде (13.9). Проведенное рассуждение можно обосновать: в действительности (13.9) дает $U_\Gamma(t; x, y)$ с точностью до гладкого слагаемого. В свою очередь, функция Грина $U(t; x, y)$; при малых t с точностью до гладкого слагаемого представляется в виде конечной суммы осциллирующих интегралов вида (13.9).

Теперь при вычислении интеграла $\int \tilde{\rho}(t) e^{i\lambda t} U(t; x, x)\, dt$, при условии достаточной малости носителя функции ρ, можно воспользоваться представлением (13.9). Отсюда для $(\widetilde{\rho U})(\lambda; x, x)$ выводится полное асимптотическое разложение по степеням λ, начинающееся с членов

$$(\widetilde{\rho U})(\lambda; x, x) \sim n\omega_0(x)\lambda^{n-1}+(n-1)\omega_1(x)\lambda^{n-2}+\ldots \tag{13.16}$$

Из него, в силу (13.1), следует асимптотика спектральной функции с точной оценкой остаточного члена:

$$e^A(\lambda^m; x, x)=e^B(\lambda; x, x)=\omega_0(x)\lambda^n+O(\lambda^{n-1}). \tag{13.17}$$

Как показывает пример 4.7, в общем случае она не улучшаема.

Модификация приведенных рассуждений позволяет получить также оценку $e^B(\lambda; x, y) = O(\lambda^{n-1})$, равномерную на компактах в $X \times X \setminus \{x=y\}$.

В рассматриваемом сейчас случае компактного многообразия без края оценка (13.17) равномерна по $x \in X$, и ее интегрирование дает оценку (9.20) для $N(\lambda; A)$.

Оценку (13.17) можно перенести на случай многообразия с краем. Это связано с ее локальностью: если два самосопряженных дифференциальных оператора A_1, A_2 на многообразиях X_1, X_2 совпадают (покоэффициентно) на открытом подмножестве $X_3 \subset X_1 \cap X_2$ и для A_1 верна оценка (13.17) равномерно на компактах в X_3, то то же выполнено и для A_2. Однако, при приближении к краю эта оценка теряет равномерность и получить непосредственно из нее (9.20) уже нельзя.

13.3. Глобальные интегральные операторы Фурье. Пусть по-прежнему Γ — оператор умножения на C^∞-функцию с малым носителем. Основным препятствием к построению ядра $U_\Gamma(t; x, y)$ в виде (13.9) при больших t является то обстоятельство, что поверхность S_t, начиная с некоторого t_0, может перестать неособо проектироваться на X. Множество точек $x \in X$, в которые S_t проектируется особо, называется *каустикой* (см. [10], а также § 14). Вблизи каустики отображение (13.14) необратимо. Поэтому здесь не удается решить уравнение эйконала методом Гамильтона—Якоби; более того, обычно в окрестности каустики уравнение эйконала вообще не имеет гладкого решения.

Эта трудность преодолевается следующим образом. Заметим, что ядро Шварца композиции двух операторов, заданных осциллирующими интегралами (13.9), имеет вид

$$\int \exp i\left(\Phi_1(t^{(1)}, x, \theta^{(1)}) - \theta^{(1)}\cdot z + \Phi_2(t^{(2)}, z, \theta^{(2)}) - \theta^{(2)}\cdot y\right) \times$$
$$\times q^{(1)}(t^{(1)}, x, z, \theta^{(1)})\, q^{(2)}(t^{(2)}, z, y, \theta^{(2)}) \times$$
$$\times (1-\vartheta^{(1)}(\theta^{(1)}))(1-\vartheta^{(2)}(\theta^{(2)}))\, dz\, d\theta^{(1)} d\theta^{(2)}.$$

Сделав здесь замену переменных $\tilde{z} = (|\theta^{(1)}|^2 + |\theta^{(2)}|^2)^{1/2} z$ и положив $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \tilde{z})$, получим осциллирующий интеграл

$$\int \exp i\psi(t^{(1)}, t^{(2)}, x, y, \theta)\, q(t^{(1)}, t^{(2)}, x, y, \theta)(1-\vartheta(\theta))\, d\theta,$$

$\theta \in \mathbf{R}^{3n}$, с однородной по θ фазовой функцией и амплитудой $q \sim \sum_j q_j$, $q_j \in O_j$. Аналогично, перемножая операторы с такими ядрами, мы снова получим оператор, ядро которого задается сходным осциллирующим интегралом (с бóльшим числом фазовых переменных). Поскольку операторы $U(t)$ образуют группу, таким способом на любом ограниченном временнóм интервале ядро $U(t; x, y)$ можно представить в виде конечной суммы осциллирующих интегралов

$$\int \exp i\Psi(t, x, y, \theta) q(t, x, y, \theta)(1-\vartheta(\theta)) d\theta \qquad (13.18)$$

(здесь x и y меняются, вообще говоря, в разных координатных окрестностях).

Представление (13.18) неудобно тем, что с ростом t в (13.18) неограниченно увеличивается число фазовых переменных. Сделав, однако, в интеграле (13.18) специальную замену переменных θ, можно преобразовать его в интеграл того же вида с $\theta \in \mathbf{R}^n$ (см. [250], [254]). Такую редукцию можно провести разными способами, и при этом будут получаться разные фазовые функции. Возникает естественный вопрос: при каких условиях два ядра вида (13.18), отвечающие различным фазовым функциям и амплитудам (возможно, с разным числом фазовых переменных), будут отличаться на гладкое слагаемое? Ответ на него дается в терминах лагранжева многообразия, сопоставляемого фазовой функции Ψ.

Положим $C_\Psi^t = \{(x, y, \theta): \Psi_\theta = 0, \theta \neq 0\}$. Когда Ψ удовлетворяет подходящим условиям невырожденности, C_Ψ^t представляет собой гладкое $2n$-мерное многообразие. Рассмотрим отображение

$$C_\Psi^t \ni (x, y, \theta) \mapsto (x, \Psi_x, y, \Psi_y) \in T'X \times T'X. \qquad (13.19)$$

Это отображение является диффеоморфизмом, переводящим C_Ψ^t в коническое подмногообразие $\Lambda_\Psi^t \subset T'X \times T'X$. Многообразие Λ_Ψ^t оказывается *лагранжевым*, т. е. на нем аннулируется симплектическая форма $dx \wedge d\xi + dy \wedge d\eta$ на $T'X \times T'X$ и $\dim \Lambda_\Psi^t = 2n$ (см. [254, т. 4]). Оно и выступает в качестве основного инвариантного объекта, позволяющего отождествить интегралы вида (13.18). Именно, имеет место следующий результат.

Теорема 13.2. Обозначим через $I(\Psi, q)$ обобщенную функцию на $X \times X$, которая задается осциллирующим интегралом (13.18). Пусть Ψ' — другая невырожденная фазовая функция (возможно, с другим числом фазовых переменных). Если $\Lambda_\Psi^t = \Lambda_{\Psi'}^t$, то существует такая амплитуда q', что $I(\Psi, q) = I(\Psi', q')$ с точностью до бесконечно гладкой функции.

Пример 13.2. Пусть лагранжево многообразие Λ_Ψ является открытым подмножеством многообразия $D = \{(x, \xi), (x, -\xi)\} \subset T'X \times T'X$. Тогда интеграл (13.18) задает ядро псевдодифференциального оператора на X.

Амплитуда q' явно вычисляется по Ψ, Ψ' и q; при этом любое конечное число слагаемых в разложении q' определяется струями конечного порядка функций Ψ, Ψ' и соответствующих слагаемых амплитуды q. Мы не приводим здесь эти весьма громоздкие формулы; опишем, однако, следующую связанную с ними важную конструкцию. Пусть q_0 и q_0' — главные однородные члены амплитуд из теоремы 13.2, $\iota: C^t_\Psi \to \Lambda^t$ и $\iota': C^t_{\Psi'} \to \Lambda^t$ — отображения вида (13.19). Выберем на Λ^t какие-нибудь координаты и перенесем их с помощью отображений ι и ι' на C^t_Ψ и $C^t_{\Psi'}$. Полученные таким образом координаты на C^t_Ψ и $C^t_{\Psi'}$ обозначим через ω и ω'. Положим

$$d_\Psi = \left| \det \frac{D(\omega, \Psi_\theta)}{D(x, y, \theta)} \right|, \quad d_{\Psi'} = \left| \det \frac{D(\omega', \Psi'_{\theta'})}{D(x, y, \theta')} \right|$$

и рассмотрим функции на Λ

$$u = \left(\left(\frac{d\mu(x)}{dx} \right)^{1/2} \left(\frac{d\mu(y)}{dy} \right)^{-1/2} q_0 d_{\Psi'} \right) \circ \iota',$$

$$u' = \left(\left(\frac{d\mu(x)}{dx} \right)^{1/2} \left(\frac{d\mu(y)}{dy} \right)^{-1/2} q_0' d_{\Psi'} \right) \circ \iota'.$$

Они связаны между собой так, что могут рассматриваться как одно и то же сечение некоторого линейного расслоения над Λ, называемого в [346] *расслоением Келлера — Маслова.* Выбор фазовой функции задает локальную тривиализацию этого расслоения, и вообще говоря, по указанным формулам u и u' вычисляются в различных тривиализациях. Таким образом интегралу (13.18) сопоставляется еще один инвариантный объект — сечение расслоения Келлера — Маслова, которое естественно принять за главный символ соответствующего интегрального оператора Фурье. Если $I(\Psi, q)$ и $I(\Psi', q')$ различаются на гладкую функцию, то главные символы соответствующих интегральных операторов Фурье совпадают.

Замечание 13.1. Построенный таким образом главный символ зависит от выбора координат на лагранжевом многообразии. При замене координат на Λ^t он меняется как *полуплотность*, т. е. умножается на модуль якобиана в степени $^1/_2$. Однако в интересующих нас ситуациях Λ^t можно параметризовать каноническими «координатами» $(y, \eta) \in T'X$, замена которых всегда дает якобиан, равный 1.

Итак, на многообразии без края с точностью до оператора с гладким ядром $U(t) = \sum_j U^{(j)}(t)$, где $U^{(j)}(t)$ — локальные интегральные операторы Фурье с ядрами вида (13.18). Оказывается, что лагранжевы многообразия операторов $U^{(j)}(t)$ являются открытыми подмножествами одного глобального лагранжева многообразия $\Lambda^t \subset T'X \times T'X$. В таких случаях говорят, что $U(t)$ представляет собой *глобальный интегральный оператор Фурье* с лагранжевым многообразием Λ^t; его главным символом называют сумму главных символов операторов $U^{(j)}(t)$.

Глобальное лагранжево многообразие Λ^t, отвечающее фундаментальному решению уравнения (13.4), описывается с помощью *бихарактеристического потока* $F^t: T'X \to T'X$, т. е. семейства сдвигов вдоль траекторий гамильтоновой системы (13.13) (*бихарактеристик*): $F^t(x^0, \xi^0) = (x(t;\ x^0, \xi^0),\ \xi(t;\ x^0, \xi^0))$. Преобразование F^t — *каноническое*, т. е. оно сохраняет симплектическую 2-форму $dx \wedge d\xi$ на $T'X$. Кроме того, F^t сохраняет гамильтониан $B_1(x, \xi)$ и $F^t(x_0, \lambda\xi^0) = (x, \lambda\xi)$, где $(x, \xi) = F^t(x_0, \xi^0)$, $\lambda > 0$. В связи с этим иногда удобнее рассматривать поток F^t не на $T'X$, а на

$$S^*X = \{(x, \xi) \in T'X : B_1(x, \xi) = 1\}.$$

Лагранжевым многообразием оператора $U(t)$ является график

$$\Lambda^t = \{(x, \xi, y, \eta) \in T'X \times T'X : (x, \xi) = F^t(y, -\eta)\}$$

отображения $(y, \eta) \mapsto F^t(y, -\eta)$. Таким образом д. о. A сопоставляются глобальные геометрические объекты: бихарактеристики и лагранжево многообразие.

Знание Λ^t позволяет описать особенности ядра $U(t;\ x, y)$, точнее говоря, его *сингулярный носитель* (sing supp) и *волновой фронт* (WF). Напомним, (см., например, [65], [254], [342], [346]), что sing supp v, где v — обобщенная функция в области $X \subset \mathbf{R}^n$, — это наименьшее замкнутое множество, вне которого $v \in C^\infty$. Далее, точка $(x^0, \xi^0) \in T'X = X \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ не принадлежит $\mathrm{WF}(v)$ в том и только в том случае, если для некоторой функции $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\varphi(x^0) \neq 0$, преобразование Фурье $(\overline{\varphi v})(\xi)$ быстро убывает, когда ξ уходит на бесконечность, оставаясь в некотором открытом конусе, содержащем ξ^0. Определение сингулярного носителя и волнового фронта естественно переносится на случай многообразий. Отметим, что sing supp v совпадает с проекцией $\mathrm{WF}(v)$ при естественном проектировании $T'X$ на X.

Спектральные свойства оператора A во многом определяются геометрией его бихарактеристик. Особую роль играют *периодические бихарактеристики*, т. е. траектории, вдоль которых $F^T(x, \xi) = (x, \xi)$. При фиксированном $x \in X$ рассматривают также *бихарактеристические петли* — траектории $F^t(x, \xi)$, которые через какое-то время $T \in \mathbf{R}^1$ возвращаются обратно в $T_x'X$ (т. е. $F^T(x, \eta) = (x, \xi)$; $\xi, \eta \in T_x'X$, $T \in \mathbf{R}^1$). Множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A)$ периодов замкнутых бихарактеристик и множество «длин» бихарактеристических петель

$$\mathscr{L}_x = \mathscr{L}_x(A) = \{T : (x, \xi) = F^T(x, \eta);\ \xi, \eta \in T_x'X\}$$

всегда содержат $T = 0$, поскольку $F^0(x, \xi) = (x, \xi)$ для любой точки $(x, \xi) \in T'X$.

Можно показать (см. [346]), что волновой фронт обобщенной функции (13.18) содержится в образе лагранжева многообразия $\Lambda_\Psi{}^t$ при отображении $(x, \xi, y, \eta) \mapsto (x, \xi, y, -\eta)$. Отсюда вытекает, что при каждом t множество sing supp $u(t; \cdot, \cdot)$ содержится в проекции многообразия Λ^t на $X \times X$. Из этого можно вывести следующий важный результат.

Теорема 13.3 ([140], [198], [203], [221]). Имеют место включения

$$\mathrm{WF}(U(t;\ \cdot,\ \cdot))\subset\{(x,\ \xi),\ F^t(x,\ \xi)\}; \tag{13.20}$$

$$\operatorname{sing\,supp} U(t;\ x,\ x)\subset\mathscr{L}_x \tag{13.21}$$

при фиксированном $x\in X$,

$$\operatorname{sing\,supp}\sigma(t)\subset\mathscr{L}. \tag{13.22}$$

Из (13.20) следует, в частности, что если $u(t)=U(t)u(0)$ — решение уравнения (13.4), то

$$\mathrm{WF}(u(t))\subset F^t(\mathrm{WF}(u(0))).$$

Таким образом, особенности решений уравнения (13.4) распространяются вдоль бихарактеристик.

Особенность обобщенных функций $\sigma(t)$ и $U(t;\ x,\ x)$ в нуле отвечает нулевому периоду всех бихарактеристик. Характер особенности функции $\sigma(t)$ в любой другой точке $T\in\mathscr{L}$ зависит от того, насколько массивно множество T-периодических бихарактеристик, а функции $U(t;\ x,\ x)$ в точке $T\in\mathscr{L}_x$ — от того, насколько массивно множество бихарактеристических петель «длины» T. Пусть Π — множество точек из $T'X$, через которые проходят периодические траектории ненулевой «длины», $\Pi_x=\{\xi\in T_x'X:F^T(x,\ \xi)=(x,\ \eta)$ при некоторых $T\neq0,\ \eta\in T_x'X\}$. Если множество Π имеет меру нуль в $T'X$, то все ненулевые особенности функции $\sigma(t)$ слабее, чем ее особенность в нуле. Аналогично, если равна нулю мера множества Π_x в слое T_xX', то ненулевые особенности функции $U(t;\ x,\ x)$ слабее нулевой. В этих случаях ненулевые особенности дают в (13.2) вклад $o(\lambda^{n-1})$, и с помощью теоремы 13.1 устанавливаются следующие результаты.

Положим

$$B_s(x,\ \xi)=B_0(x,\ \xi)-\frac{1}{2i}\sum_j\frac{\partial^2B_1(x,\ \xi)}{\partial x_j\partial\xi_j}-\frac{1}{2i}\sum_j\frac{\partial B_1(x,\ \xi)}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\ln\frac{d\mu}{dx};$$

ясно, что функция B_s однородна по ξ порядка 0.

Теорема 13.4 ([221]). Пусть мера множества Π в $T'X$ равна нулю. Тогда справедлива асимптотическая формула (9.21), где

$$a_1=-n(2\pi)^{-n}\int\limits_{B_1(x,\xi)<1}B_s(x,\ \xi)\,dx\,d\xi. \tag{13.23}$$

Теорема 13.5 ([140]). Пусть мера множества Π_x в слое $T_x'X$ равна нулю при $x\in K$, где K — компакт в X. Тогда равномерно по $x\in K$ выполнено $e^A(\lambda^m;\ x,\ x)\sim\omega_0(x)\lambda^n+\omega_1(x)\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1})$, где $\omega_0(x)$ определено в (9.15) и

$$\omega_1(x)=-n(2\pi)^{-n}\frac{dx}{d\mu}\int\limits_{B_1(x,\xi)<1}B_s(x,\ \xi)\,d\xi. \tag{13.24}$$

В частности, если A — эллиптический дифференциальный оператор в пространстве функций, то B_s — однородная нечетная по ξ функция (см. [221]), поэтому выражения (13.23), (13.24) равны нулю.

Замечание 13.2. В [140], [221], [254] двучленные спектральные асимптотики были получены для п. д. о., действующих в пространствах полуплотностей. Для таких п. д. о. инвариантно определен *субглавный символ*

$$\operatorname{sub} B(x, \xi)=B_0(x, \xi)-\frac{1}{2i}\sum_j \frac{\partial^2 B_1(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j},$$

и в (13.23), (13.24) B_s заменяется на $\operatorname{sub} B$. Теоремы 13.4, 13.5 сводятся к результатам [140], [221], [254], если вместо B рассмотреть оператор в пространстве полуплотностей $\tilde{B}=(d\mu)^{1/2}B(d\mu)^{-1/2}$, при этом $B_s=\operatorname{sub}\tilde{B}$.

В некоторых случаях, имея информацию о поведении потока F^t при $t\to\pm\infty$, можно получить и оценку остатка в формуле (9.21) (см. [45]). Например, если A — оператор Лапласа — Бельтрами ($m=2$) на многообразии отрицательной кривизны, то в (9.21) можно заменить $o(\lambda^{n-1})$ на $O(\lambda^{n-1}/\log\lambda)$ [184]. С другой стороны, если в теоремах 13.4, 13.5 полностью снять условия на поток F^t, то результаты уже перестают быть верными. Для оператора Лапласа — Бельтрами на сфере S^n (см. пример 4.7) функция $N(\lambda; A)$ имеет при $\lambda=\lambda_k$ скачок порядка $\lambda_k^{(n-1)/2}$, следовательно, формула типа (9.21) здесь уже невозможна. Операторы, у которых, подобно этому, имеется богатое множество периодических бихарактеристик, рассмотрены в § 14.

13.4. Замечания о других задачах. Отражение и расщепление бихарактеристик. Построения, описанные выше, лежат в основе реализации метода гиперболического уравнения и для других классов операторов. К сожалению, во многих случаях, построение $U(t)$, иногда даже при малых t, затруднено, и результаты о распространении особенностей, подобные теореме 13.3, уже, вообще говоря, неверны.

Эти трудности часто удается преодолеть на следующем пути. Пусть вначале в условиях п. 13.3 Γ — п. д. о. порядка 0 на X с символом $\Gamma(x, \xi)$. Ядро $U_\Gamma(t; x, y)$ точно так же, как и $U(t; x, y)$, представляется локально в виде (13.18); нужно лишь заменить начальные условия для уравнений переноса при малых t, положив $q(0, x, y, \theta)=\Gamma(y, \theta)$. Соотношения (13.20), (13.21), (13.22) заменяются соответственно на

$$\mathrm{WF}(U_\Gamma(t; x, y))\subset\{((x, \xi),\ F^t(x, \xi)\colon (x, \xi)\in\operatorname{supp}\Gamma\}, \quad (13.25)$$

$$\operatorname{sing\,supp} U_\Gamma(t; x, x)\subset\mathcal{L}_{x,\Gamma}, \quad (13.26)$$

$$\operatorname{sing\,supp} \sigma_\Gamma(t)\subset\mathcal{L}_\Gamma, \quad (13.27)$$

где $\mathscr{L}_{x,\Gamma}$ — множество «длин» бихарактеристических петель, выходящих из точек $(x, \xi) \in T'_x X \cap \operatorname{supp} \Gamma$, $\mathscr{L}_\Gamma$ — множество периодов замкнутых бихарактеристик, пересекающихся с носителем символа $\Gamma(x, \xi)$.

Как мы увидим ниже, для многих классов операторов можно выделить замкнутые конические подмножества $\Xi_T \subset T'X$ (как правило, нулевой меры), каждое из которых содержит все «неприятности» задачи на временно́м интервале $(-T, T)$. Если символ $\Gamma(x, \xi)$ равен нулю в конической окрестности множества Ξ_T, то при $|t| < T$ удается построить для $U_\Gamma(t; x, y)$ локальные представления, аналогичные (13.18), и, обобщив понятие «бихарактеристический поток», доказать аналоги соотношений (13.25)—(13.27). Затем с помощью теоремы 13.1 для $N_\Gamma(\lambda; B) = \operatorname{Tr}(E^B(\lambda)\Gamma)$ получается асимптотическая формула, которая становится все более точной с ростом T: невязка в этой формуле оценивается через $c_T\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})$, где $c_T \to 0$ при $T \to \infty$, а $o(\lambda^{n-1})$ зависит от T. Для функции $N_{I-\Gamma}(\lambda; B)$ уже иными методами удается получить аналогичную формулу, причем, когда мера Ξ_T равна нулю, коэффициент при λ^{n-1} в невязке можно сделать сколь угодно малым при фиксированном T за счет выбора п. д. о. Γ. Это позволяет определить асимптотику $N(\lambda; B)$ с точностью до $o(\lambda^{n-1})$; в «регулярных» случаях для $N(\lambda; B)$ верна формула вида (9.21).

Сходными рассуждениями, используя аналог соотношения (13.26), в принципе можно получить и двучленную асимптотику спектральной функции (см., например, теорему 13.10).

В этом пункте мы объясним, какие сложности появляются в разных задачах при построении $U(t)$, как эти сложности преодолеваются, и приведем результаты о распространении особенностей для $U^\Gamma(t)$.

Пусть X — многообразие с краем $Y = \partial X$; локально распрямляя границу, будем считать, что $X = \{x : x_n > 0\}$, $x = (x', x_n)$. Рассмотрим эллиптический д. о. A второго порядка в X с каким-нибудь регулярным граничным условием на Y. Пусть Γ — п. д. о. в X; будем считать, что его символ $\Gamma(x, \xi)$ обращается в нуль в окрестности $\Xi^{(0)} = T'X|_Y$ и имеет достаточно малый конический носитель. Внутри X, в силу конечной скорости распространения $U_\Gamma(t; x, y)$ можно строить в виде (13.18) до тех пор, пока бихарактеристики, вышедшие из $\operatorname{supp} \Gamma(x, \xi)$, не подойдут к границе. После этого надо уже позаботиться и о выполнении граничного условия.

Говорят, что бихарактеристика $\gamma^t(y, \eta)$, начинающаяся в точке (y, η) и попадающая на границу в точку $(x', 0, \xi', \xi_n)$ в момент времени t_0, *трансверсальна* к границе, если на ней $\dot{x}_n = \frac{\partial A_2}{\partial \xi_n}(x', 0, \xi', \xi_n) < 0$. Такую бихарактеристику можно продолжить по законам геометрической оптики: ее продолжением называется *отраженная бихарактеристика* $\widetilde{\gamma}^t(y, \eta)$, выходящая в момент времени t_0 из точки $(x', 0, \xi', \widetilde{\xi}_n)$, где $\widetilde{\xi}_n$ — решение уравнений

$$A_2(x', 0, \xi', \xi_n) = A_2(x', 0, \xi', \zeta),$$
$$\operatorname{sign} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_n}(x', 0, \xi', \xi_n) = -\operatorname{sign} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_n}(x', 0, \xi', \zeta) \tag{13.28}$$

относительно ζ.

Предположим, что все бихарактеристики, начинающиеся в supp Г, выходят на границу трансверсально. Оказывается, в этом случае $U_\Gamma(t; x, y)$ можно представить вблизи границы в виде суммы двух осциллирующих интегралов вида (13.18):

$$U_\Gamma(t; x, y) = \int e^{i\Psi_1} q^{(1)} \cdot d\theta + \int e^{i\Psi_2} q^{(2)} d\theta. \tag{13.29}$$

Ланграножево многообразие $\Lambda^t_{\Psi_1}$, как и раньше, порождается бихарактеристическим потоком, $\Lambda^t_{\Psi_2}$ — *отраженным бихарактеристическим потоком*:

$$\Lambda^t_{\Psi_2} = \{(x, \xi), (y, \eta) : (x, \xi) = \widetilde{\gamma}^t(y, -\eta), (y, -\eta) \in \operatorname{supp} \Gamma\}.$$

При малых t функции Ψ_j и $q^{(j)}$ могут быть найдены из уравнений эйконала и переноса. Уравнения и начальные условия для Ψ_1, $q^{(1)}$ будут те же, что и на многообразии без края. Уравнениям для Ψ_2, $q^{(2)}$ отвечают отраженные траектории. Начальные условия для этих функций ставятся на поверхности $\{x_1 = 0\}$, они получаются (после того, как найдены Ψ_1 и $q^{(1)}$) подстановкой (13.29) в краевое условие.

После того, как все бихарактеристики, начинающиеся в supp Г, выйдут на границу, первое слагаемое в (13.29) станет гладкой функцией. Поэтому для таких значений t в представлении (13.29) можно уже оставить только второе слагаемое. Далее $U_\Gamma(t; x, y)$ вновь строится в форме осциллирующих интегралов вида (13.18), вплоть до момента, когда на границу выйдут отраженные траектории. Если все эти траектории будут трансверсальны, то снова можно представить $U_\Gamma(t; x, y)$ в виде (13.29) и т. д.

Эти рассуждения показывают, что на многообразии с краем роль бихарактеристик должны играть *биллиардные траектории*, т. е. траектории, полученные последовательными отражениями бихарактеристик, а в качестве F^t естественно взять *биллиардный поток* — семейство сдвигов вдоль биллиардных траекторий. Поскольку при отражении бихарактеристик гамильтониан $B_1(x, \xi) = (A_2(x, \xi))^{1/2}$ сохраняется, по-прежнему $B_1(F^t(y, \eta)) = B_1(y, \eta)$, и $F^t(y, \lambda\eta) = (x, \lambda\xi)$, если $F^t(y, \eta) = (x, \xi)$, $\lambda > 0$.

В отличие от бихарактеристики, не каждая биллиардная траектория продолжается на все $t \in \mathbf{R}^1$: во-первых, может нарушиться условие трансверсальности, во-вторых, за конечное время может произойти бесконечное число отражений (во втором случае траекторию называют *тупиковой*). Однако, «плохих» траекторий мало: для любого T множество точек $\Xi_T^{(1)} \subset T'X$, через которых проходят траектории, не допускающие продолжения на $[-T, T]$, замкнуто и имеет меру нуль в $T'X$ [81]. Поэтому поток F^t определен для всех t на множестве полной меры в $T'X$.

Итак, если $\Xi_T^{(1)} \cap \operatorname{supp} \Gamma = \varnothing$, то $U_\Gamma(t; x, y)$ при $|t| < T$ представляется локально либо в виде (13.18), либо в виде (13.29) (здесь уже можно отказаться от малости носителя $\Gamma(x, \xi)$). Это позволяет рассматривать $U_\Gamma(t)$ как глобальный интегральный оператор Фурье с лагранжевым «многообразием»

$$\Lambda_\Gamma^t = \{(x, \xi), (y, \eta) : (x, \xi) = F^t(y, -\eta), (y, -\eta) \in \operatorname{supp} \Gamma\},$$

где F^t — биллиардный поток. Как и в п. 13.3, отсюда выводится следующий результат о распространении особенностей.

Теорема 13.6 ([197], [242]). Пусть A — эллиптический оператор второго порядка с регулярными граничными условиями, Γ — п. д. о. с символом, равным нулю в окрестности $\Xi^{(0)}$ и в окрестности $\Xi_T^{(1)}$. Тогда при $|t| < T$ для волнового фронта функции $U_\Gamma(t; x, y)$ выполнено включение (13.25), где F^t — биллиардный поток, а для $\sigma_\Gamma(t)$ — включение

$$\operatorname{sing\,supp} \sigma_\Gamma \cap (-T, T) \subset \mathscr{L}_\Gamma \cap (-T, T),$$

где $\mathscr{L}_\Gamma$ — множество периодов замкнутых траекторий потока F^t, проходящих через точки из носителя символа оператора Γ.

Для эллиптических краевых задач порядка $m > 2$ для определения $U_\Gamma(t)$ целесообразно рассматривать уравнение

$$\left(i \frac{d}{dt}\right)^m U_\Gamma - A U_\Gamma = 0 \qquad (13.30)$$

(см. [36], [37]). Хотя задача Коши для уравнения (13.30) некорректна, операторы $\exp(\pm it A^{1/m}) \Gamma$ выделяются среди прочих его решений одним начальным условием $U_\Gamma(0) = \Gamma$ и требованием равномерной ограниченности по t. Это позволяет эффективно найти представление ядра $U(t; x, y)$ внутри X в виде осциллирующих интегралов.

Поскольку для эллиптических краевых задач порядка $m > 2$ должно выполняться несколько краевых условий на ∂X, представление типа (13.29) для $\exp(-it A^{1/m})$, получаемое с помощью уравнений вида (13.28), должно содержать бóльшее число слагаемых. В эти уравнения теперь входит символ $A_m(x, \xi)$, а потому они имеют, вообще говоря, более чем одно решение $\tilde{\xi}_n$. Вещественные решения $\tilde{\xi}_n$ порождают в представлении типа (13.29) обычные осциллирующие интегралы, комплексные — осциллирующие интегралы с комплексной фазой (отвечающие экспоненциально затухающим отраженным волнам).

Каждому вещественному $\tilde{\xi}_n$ соответствует своя отраженная бихарактеристика. Поэтому, когда уравнения (13.28) имеют более одного вещественного решения, возникает несколько различных законов отражения. В таких случаях вместо биллиардного потока рассматривают *полупоток* $F^t : T'X \to T'X$ — семейство многозначных отображений, получающихся сдвигом по различным биллиардным траекториям. С учетом этой замены, на операторы высокого порядка переносится теорема 13.6 — надо лишь заменить $(-T, T)$ на $[0, T)$ и взять в качестве Ξ^I_T дополнение множества точек $(x, \xi) \in T'X$, для которых все биллиардные траектории $F^t(x, \xi)$ определены и трансверсальны к границе при $0 \leqslant t \leqslant T$ (этот результат по существу содержится в [36]).

В данной ситуации множество $\Xi^{(1)}_T$ уже не обязательно мало. По-прежнему, мера множества точек, из которых выходит хотя бы одна не трансверсальная к границе траектория, равна нулю. Однако, может оказаться, что ненулевую меру имеет множество точек, из которых выходят тупиковые траектории (см. [38]). Это связано с тем, что из фиксированной точки выходит, вообще говоря, несчетное множество различных биллиардных траекторий. Если уравнения вида (13.28) всегда имеют лишь одно вещественное решение (это верно, например, для бигармонического оператора Δ^2,), то траектории не разветвляются, и мера $\Xi^{\,1}_T$ равна нулю, как и для оператора второго порядка.

Пусть далее A — эллиптический оператор (для простоты первого порядка) в k-мерном эрмитовом расслоении $\mathscr{E}$ над компактным многообразием X без края. Главный символ $A_1(x, \xi)$ — эрмитов автоморфизм слоя $\mathscr{E}_x$ — имеет k непрерывных ветвей $\tau_j(x, \xi)$ собственных значений, называемых *термами*. Анализ гиперболического уравнения (13.4) во многом зависит от поведения кратностей термов.

Если все термы равны между собой, т. е. $A_1(x, \xi) = \tau(x, \xi) \cdot 1_x$, где 1_x — тождественный автоморфизм слоя $\mathscr{E}_x$, то фундаментальное решение $U(t)$ строится так же, как в скалярном случае — в виде (13.9), с тем отличием, что здесь амплитуда $q(t, x, y, \theta)$ является гомоморфизмом слоя $\mathscr{E}_y$ в $\mathscr{E}_x$. Для данного случая без изменений сохраняются теоремы 13.2 и 13.3.

Рассмотрим далее случай, когда термы $\tau_j(x, \xi)$ не все равны, но имеют не зависящую от (x, ξ) кратность. Тогда унитарным псевдодифференциальным преобразованием можно микролокально привести оператор A к виду

$$A^{(1)} \oplus A^{(2)} \ldots \oplus A^{(s)}, \quad s \leqslant k, \tag{13.31}$$

где каждый оператор $A^{(l)}$ имеет главный символ $\tau_l(x, \xi) \cdot 1_x$ и действует в некотором расслоении $\mathscr{E}^{(l)}$ над X, так, что $\mathscr{E} = \oplus \mathscr{E}^{(l)}$. В этом случае уравнение (13.4) распадается в прямую сумму гиперболических уравнений вида

$$\frac{1}{i} \frac{dU^{(l)}}{dt} = A^{(l)} U^{(l)}, \quad U(t) = \oplus U^{(l)}(t),$$

каждое из которых исследуется прежними методами. Каждый терм порождает бихарактеристический поток F_l^t со своим набором периодов $\mathscr{L}^{(l)}$.

Теорема 13.7 ([69]). В описанных выше условиях

$$\mathrm{WF}(U(t;\, x,\, y)) \subset \bigcup_l ((x,\, \xi),\, F_l^t(x,\, \xi)),$$

$$\operatorname{sing\,supp} \sigma(t) \subset \bigcup_l \mathscr{L}^{(l)}.$$

Если термы меняют кратность на $T'X$, то положение осложняется, поскольку получить разложение вида (13.31) уже не удается. Поведение термов вблизи точки перемены кратности может быть различным. Как показано в [5], в типичной ситуации (т. е. для символов из открытого всюду плотного множества в топологии C^∞) термы попарно различны всюду, кроме некоторого подмножества $\Sigma \subset T'X$ коразмерности 2; на Σ, по крайней мере, два терма совпадают, причем на Σ совпадающие термы теряют гладкость. На некоторых подмножествах положительной коразмерности в Σ кратность термов может быть и выше. Особенности ядра $U(t;\, x,\, y)$ вблизи множества переменных кратности термов ведут себя довольно сложным образом. Однако, вне указанного множества выполнен аналог теоремы 13.7.

Теорема 13.8 ([69]). Пусть $\Xi_T^{(2)} \subset T'X$ — такое подмножество, что на каждой компоненте его дополнения термы имеют постоянную кратность, и на бихарактеристике любого терма, начинающейся в $T'X \setminus \Xi_T^{(2)}$ при $|t| \leqslant T$ не происходит перемены кратности. Пусть $\Gamma(x,\, \xi) = 0$ в окрестности $\Xi_T^{(2)}$. Тогда

$$\mathrm{WF}(U_\Gamma(t;\, x,\, y)) = \bigcup_l \{((x,\, \xi),\, F_l^t(x,\, \xi)) : \Gamma(x,\, \xi) \neq 0\}, \quad |t| < T,$$

$$\operatorname{sing\,supp} \sigma_\Gamma \cap (-T,\, T) \subset \bigcup_l \mathscr{L}_\Gamma^{(l)} \cap (-T,\, T).$$

Наконец, для операторов, действующих в расслоении над многообразием с краем, встречаются сложности, связанные как с переменной кратности термов, так и с множественностью законов отражения. Кроме того, при отраженин может происходить переход особенности решения с бихарактеристики одного терма на бихарактеристику другого (проявлением этого эффекта служит известное свойство упругих волн: поперечная волна при отражении может давать как поперечную, так и продольную волны). В этой ситуации можно также ввести многозначный полупоток F^t, отвечающий бихарактеристическим потокам термов со всевозможными расщеплениями при отражении от границы (см. [38]). Если, подобно теоремам 13.6, 13.8, вводя подходящий п. д. о. Γ, исключить из $T'X$ окрестности множеств типа $\Xi^{(0)}$, $\Xi^{(1)}_T$ и $\Xi^{(2)}_T$ то для $U_\Gamma(t)$ и $\sigma(t)$ получаются результаты, аналогичные этим теоремам (см. [37]).

13.5. Нормальная сингулярность. Двучленные асимптотические формулы. Подход к получению точных асимптотических формул для спектра, развитый В. Я. Иврием, опирается на результаты о распространении особенностей типа теорем 13.6, 13.8, а также на энергетические оценки для гиперболических уравнений. С помощью таких оценок доказывается, что в рассматриваемых задачах функция $\sigma(t)$ имеет в нуле *нормальную сингулярность,* т. е. $(tD_t)^N\sigma(t)\in H^s(-t_0, t_0)$ для некоторого $s\in\mathbf{R}^1$ и малого t_0 при всех N. Это свойство позволяет доказать, что естественная процедура последовательных приближений для построения $U(t)$ (аналогичная описанной в § 12 для параболического уравнения), использующая замораживание коэффициентов, распрямление границы и т. п., дает правильное разложение по гладкости для $\sigma(t)$ в малой окрестности нуля (хотя и не дает разложения по гладкости для самого ядра $U(t; x, y)$). Нулевая особенность функции $\sigma(t)$ оказывается степенной: для функции ρ с достаточно малым носителем

$$(\widetilde{\rho\sigma})(\lambda)\sim na_0\lambda^n+(n-1)a_1\lambda^{n-1}+\ldots,\quad \lambda\to+\infty. \tag{13.32}$$

Разложение (13.32) (с учетом теоремы 13.1) уже доказывает асимптотику спектра с точной оценкой остатка вида (9.20), верную, в частности, для всех классов задач, обсуждаемых в данном параграфе. Отметим, что пока неизвестны примеры регулярных дифференциальных операторов, для которых эта оценка нарушается.

Подобные соображения, примененные не к $\sigma(t)$, а к $U(t; x, x)$ позволяют в ряде случаев получить также одночленную асимптотику спектральной функции с точной оценкой остатка, равномерной вплоть до границы — см. [69], [260].

Для того, чтобы доказать для $N(\lambda; B)$ двучленную асимптотическую формулу вида (13.5), на исследуемый оператор A приходится наложить дополнительное ограничение (принимающее, в конечном счете, геометрический характер). Требуется, чтобы для любого T можно было указать замкнутое коническое множество $\Xi_T'\subset T'X$ нулевой меры такое, что

$$\operatorname{sing\,supp}\sigma_\Gamma\cap(-T, T)=\{0\} \tag{13.33}$$

для любого п. д. о. Γ с символом, равным нулю в окрестности Ξ_T'. Тогда применение результатов п. 13.4 и теоремы 13.1 дает для $N_\Gamma(\lambda; B)$ оценку

$$|N_\Gamma(\lambda; B)-a_0^{(1)}\lambda^n-a_1^{(1)}\lambda^{n-1}|\leqslant c_Ta_0^{(1)}\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}), \tag{13.34}$$

где $c_T\to 0$ при $T\to\infty$.

Теперь с помощью тех же энергетических оценок доказывается, что и $\sigma_{I-\Gamma}(t)$ имеет в нуле нормальную сингулярность, и что для нее выполняется (13.32) с заменой a_0 и a_1 на $a_0^{(2)}=a_0-a_0^{(1)}$ и $a_1^{(2)}=a_1-a_1^{(1)}$. Теорема 13.1 с $T=T_0$ дает для $N_{I-\Gamma}(\lambda; B)$ оценку вида (13.34) с правой частью $c_{T_0}a_0^{(2)}\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1})$. Коэффициент $a_0^{(2)}$ явно вычисляется, и оказывается, что он может быть сделан сколь угодно малым за счет малости носителя символа оператора $I-\Gamma$. Поэтому из оценок для N_Γ и $N_{I-\Gamma}$ следует двучленная асимптотическая формула (9.21).

Пусть, в частности, $A=A_\pm$ — оператор Лапласа — Бельтрами на компактном римановом многообразии X с краем Y, знак «$-$» отвечает задаче D, знак «$+$» — задаче N или третьей краевой задаче (2.15). Как уже отмечалось, формула (9.20) верна всегда. Обозначим через Π_T множество точек из $T'X$, через которые проходят периодические траектории биллиардного потока с ненулевыми периодами, не превосходящими T, через Π — объединение Π_T по $T\neq 0$. В описанной выше схеме в качестве Ξ'_T можно взять $\Xi_T\cup\Pi_T$, где $\Xi_T=\Xi^{(0)}\cup\Xi_T^{(1)}$ (см. п. 13.4). Согласно теореме 13.6, если $\Gamma(x, \xi)=0$ в окрестности Ξ'_T, то выполнено (13.33). Таким образом, получается следующий результат.

Теорема 13.9 ([68]). Если множество Π имеет нулевую меру в $T'X$, то верна двучленная асимптотическая формула (9.21), (9.22).

Как показано Петковым и Стояновым [309], свойство $\operatorname{mes}\Pi=0$ выполнено для типичных в смысле п. 8.2 областей в R^n.

Аналогичный результат о двучленной асимптотике спектральной функции оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии с краем содержится в [140]. Здесь в качестве множества «плохих» точек $\Xi_{x,T}$ выступает коническое подмножество слоя T'_xX, состоящее из тех $\xi\in T'_xX$, для которых биллиардная траектория $F^t(x, \xi)$ не может быть продолжена на временной интервал $[-T, T]$ (допускаются только трансверсальные отражения). Мера множества $\Xi_x=\bigcup\limits_{T\neq 0}\Xi_{x,T}$ в T'_xX не обязательно равна нулю; точки x, для которых Ξ_x имеет нулевую меру, называются *регулярными*. Точно так же, как в п. 13.3, определяется $\Pi_x\subset T'_xX$ — множество направлений, по которым выходят биллиардные траектории, возвращающиеся через какое-то время в T'_xX.

Теорема 13.10 ([140]). Пусть $x\in\bar{Y}$ является регулярной точкой. Если мера множества Π_x в T'_xX равна нулю, то для $e^A(\lambda; x, x)$ справедлива асимптотическая формула из теоремы 13.5 с $\omega_1(x)=0$. Эта асимптотика равномерна по x на строго внутренних компактах, не содержащих нерегулярных точек и точек, для которых Π_x имеет ненулевую меру.

Пусть теперь A — эллиптический оператор в расслоении $\mathscr{E}$ над многообразием без края X. Вновь из свойства нормальности особенности $\sigma(t)$ в нуле следует, что оценка вида (9.20) выполнена всегда. В качестве Ξ'_T здесь можно принять $\bigcup_l \Pi_T^{(l)} \cup \Xi_T^{(2)}$, где $\Pi_T^{(l)}$ — множество периодических точек потоков F_l^t с ненулевыми периодами, не превосходящими T. Если мера множества Ξ'_T равна нулю для любого T (т. е. если равна нулю мера множества точек, из которых выходят периодические траектории или траектории, попадающие в зону перемены кратности), то для $N(\lambda)$ верна двучленная асимптотическая формула вида (9.21).

Развитый В. Я. Иврием метод позволил получить точные оценки остатка и двучленные асимптотические формулы и во многих других случаях: для весьма общих краевых задач для эллиптических операторов первого и второго порядка, действующих в сечениях векторных расслоений над многообразием с краем, для некоторых краевых задач вида $Au=\lambda Bu$ с оператором A второго или первого, а B — первого или нулевого порядка, для оператора Максвелла и др.; получены также точные спектральные асимптотики в задачах о дискретном спектре операторов Шрёдингера и Дирака [70], о дискретном спектре многочастичного оператора Шрёдингера и т. п. Наиболее подробное изложение метода В. Я. Иврия содержится в его книге [260], где имеются и дальнейшие ссылки.

В последнее время, комбинируя метод гиперболического уравнения и оценки из § 5, В. Я. Иврий получил очень точные оценки числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, а также числа собственных значений оператора Дирака, лежащих в фиксированном открытом интервале [261]. В этих оценках эффективно учитывается зависимость оператора от параметров, что позволяет выводить из них различные асимптотические формулы для спектра.

13.6. Другие результаты. Точные спектральные асимптотики для краевых задач с ветвящимися биллиардными траекториями были получены Д. Г. Васильевым (в работах В. Я. Иврия [69], [260] ставились условия, исключающие ветвление). В таких задачах реализация изложенной в п. 13.4 схемы затрудняется тем, что множество $\Xi_T^{(1)}$ может иметь ненулевую меру (см. п. 13.4). В связи с этим Д. Г. Васильев ввел понятие *нетупиковости*: многозначный биллиардный полупоток F^t называется *нетупиковым*, если мера множества точек $(x, \xi) \in T'X$, из которых выходит хотя бы одна тупиковая траектория $F^t(x, \xi)$, равна нулю. Некоторые достаточные условия нетупиковости даны в [36].

В [37] для эллиптических операторов порядка $2m$ на компактном многообразии X с краем Y, на котором поставлены регулярные краевые условия, без всяких ограничений на биллиардный полупоток установлена одночленная асимптотическая формула (9.20). При условии, что полупоток F^t является нетупиковым, и что мера множества точек (x, ξ), из которых выходит хотя бы одна периодическая траектория $F^t(x, \xi)$, равна нулю, в [37] доказана двучленная асимптотическая формула вида (9.21). В ней

$$a_1 = (2\pi)^{1-n} \int\limits_{T'Y} (n_B(1;\ x',\ \xi') + (2\pi)^{-1}\varphi_B(1;\ x',\ \xi'))\, dx'd\xi',$$

где n_B, φ_B при фиксированных x', ξ' — функция распределения собственных значений и фаза рассеяния вспомогательной задачи на полуоси $x_n > 0$:

$$A'(x',\ 0,\ \xi',\ D_{x_n})\, u(x_n) = \lambda u(x_n),$$
$$B_j'(x',\ \xi',\ D_{x_n})|_{x_n=0} = 0. \qquad (13.35)$$

Операторы $A'(x',\ 0,\ \xi',\ D_{x_n})$ и $B_j(x',\ \xi',\ D_{x_n})$ получаются заменой в главных символах оператора A и граничных операторов B_j переменной ξ_n на D_{x_n}.

Фаза рассеяния φ_B определяется следующим образом. Рассмотрим непрерывный спектр задачи (13.35). Он заполняет бесконечный полуинтервал $[\lambda_*^{(1)},\ +\infty)$, где $\lambda_*^{(1)} = \min \sigma_{2m}(\xi_n)$, $-\infty < \xi_n < +\infty$, σ_{2m} — полный символ оператора $A'(x',\ 0,\ \xi',\ D_{x_n})$. Число λ_* называется *особой точкой* непрерывного спектра задачи (13.35), если уравнение $\sigma_{2m}(\xi_n) = \lambda_*$ имеет кратный вещественный ξ-корень. Перенумеруем все особые точки: $\lambda_*^{(1)} < \lambda_*^{(2)} < \ldots$ $\ldots < \lambda_*^{(\nu)}$; разумеется, $1 \leqslant \nu \leqslant 2m - 1$.

Пусть λ — точка непрерывного спектра, не являющаяся ни особой точкой, ни собственным значением задачи (13.35). Обозначим через

$$\xi_1^- < \xi_1^+ < \xi_2^- < \xi_2^+ < \ldots < \xi_q^- < \xi_q^+$$

вещественные ξ_n-корни уравнения $\sigma_{2m}(\xi_n) = \lambda$; заметим, что $\sigma_{2m}'(\xi_l^-) < 0$, $\sigma_{2m}'(\xi_l^+) > 0$. Каждая собственная функция непрерывного спектра, отвечающая λ, имеет вид

$$\sum_{l=1}^{p} \left(\frac{c_l^- \exp(i x_n \xi_l^-)}{(-2\pi\sigma_{2m}'(\xi_l^-))^{1/2}} + \frac{c_l^+ \exp(i x_n \xi_l^+)}{(2\pi\sigma_{2m}'(\xi_l^+))^{1/2}} \right) + \sum_{l=1}^{m-p} \tilde{c}_l v_l(x_n),$$

где v_l — убывающие при $x_n \to \infty$ функции, c_l^+, c_l^-, $\tilde{c}_l$ — константы. Пространство таких собственных функций p-мерно; число p называется *кратностью непрерывного спектра в точке* λ. Столбцы c^+ и c^-, составленные из c_l^+ и c_l^-, связаны между собой так, что

$$c^+ = S(\lambda)\, c^-,$$

где $S(\lambda)$ — унитарная матрица (называемая *матрицей рассеяния*). Матрица-функция $S(\lambda)$ регулярно продолжается на лежащие в непрерывном спектре собственные значения, не являющиеся одновременно особыми точками.

На интервале $(-\infty, \lambda_*^{(1)})$, по определению, $\varphi_B(\lambda)=0$. На остальных интервалах вида $(\lambda_*^{(k)}, \lambda_*^{(k+1)})$

$$\varphi_B(\lambda)=\mathrm{Arg}(\det S(\lambda))+c_k, \quad c_k=\mathrm{const}.$$

Числа c_k определяются из следующих нормировочных соотношений:

$$\varphi_B(\lambda_*^{(\varkappa)}+0)-\varphi_B(\lambda_*^{(\varkappa)}-0)=2\pi q_*^{(\varkappa)},$$

$$q_*^{(\varkappa)}=-p_*^{(\varkappa)}-\lim_{\lambda\to\lambda_*^{(\varkappa)}}\left((\lambda-\lambda_*^{(\varkappa)})\int_0^\infty (r_B(\lambda; x_n, x_n)-\right.$$

$$\left.-r(\lambda; x_n, x_n))\,dx_n\right), \tag{13.36}$$

где $p_*^{(\varkappa)}$ — кратность $\lambda_*^{(\varkappa)}$ как собственного значения задачи (13.35) (если $\lambda_*^{(\varkappa)}$ не является собственным значением, то $p_*^{(\varkappa)}=0$), $r_B(\lambda; x_n, y_n)$ и $r(\lambda; x_n, y_n)$ — интегральные ядра резольвенты задачи (13.35) на полуоси и задачи на всей оси без граничного условия в нуле. Предел в (13.36) берется по λ, не лежащим на вещественной оси; этот предел существует и конечен: $|p_*^{(\varkappa)}+$ $+q_*^{(\varkappa)}|\leqslant 2m$. Когда уравнение $\sigma_{2m}(\xi_n)=\lambda_*^{(\varkappa)}$ имеет только один кратный вещественный корень ξ_*, причем двукратный (а это ситуация общего положения), формула (13.36) упрощается и может быть приведена к виду

$$q_*^{(\varkappa)}=\pm 1/4. \tag{13.37}$$

Знак «плюс» в (13.37) берется, если при $\lambda=\lambda_*^{(\varkappa)}$ задача (13.35) имеет решение вида $u(x_n)=\exp(ix_n\xi_n)+v(x_n)$, где $v(x_n)\to 0$ при $x_n\to+\infty$, знак «минус» — если такого решения она не имеет.

Сходные результаты получены Д. Г. Васильевым и для эллиптических систем четного порядка на многообразии с краем. Его метод доказательства отличается от метода В. Я. Иврия, хотя общая идея (см. п. 13.4) остается прежней. При исследовании асимптотики $N_{t-\Gamma}(\lambda)$ в нем используется либо обычное представление $U(t)$ внутри области при малых t, либо (вблизи границы) приближение спектральной функции оператора A спектральной функцией оператора с постоянными коэффициентами, получаемого при локальном распрямлении границы и замораживании коэффициентов A. Этот метод оказывается более простым с технической точки зрения, однако, он имеет не столь широкую область приложений (в частности, для систем приходится требовать постоянства кратностей собственных значений главного символа).

Своеобразной модификацией краевых задач для эллиптических систем является *задача трансмиссии*. Пусть $X_\pm$ — n-мерные многообразия с общим краем Y, $A_\pm$ — эллиптические операторы порядка $2m$ на $X_\pm$. Оператор A в $L_2(X)$, $X=X_+\cup X_-$, определяется естественным образом на $D(A)\subset H^{2m}(X_+)\oplus H^{2m}(X_-)$, причем область определения $D(A)$ задается подходящими условиями согласования граничных значений на Y функций $u_\pm\in H^{2m}(X_\pm)$. Здесь вновь появляется полупоток F^t: бихарактеристика, попадающая на Y из X_+, расщепляется на отраженную, возвращающуюся в X_+, и преломленную, уходящую в X_-. Асимптотические формулы для спектра таких задач выводятся практически теми же средствами. В случае, когда $A_\pm$ — операторы Лапласа—Бельтрами на $X_\pm$, они были получены Ю. Г. Сафаровым [316].

§ 14. Бихарактеристики и спектр

Между спектром дифференциального оператора и свойствами его бихарактеристического потока имеется глубокая связь. Ее существование подсказывается, в первую очередь, физическими соображениями: в классической и квантовой системах периодические траектории и, соответственно, собственные функции оператора описывают объекты, совершающие периодическую эволюцию во времени. Такая связь была отмечена уже в § 13 (теоремы 13.3, 13.6), где она использовалась для доказательства теорем о двучленной асимптотике функции $N(\lambda)$. В п. 14.1 и п. 14.2 мы обобщим эти результаты, отказавшись от условия малости множества периодических траекторий. Имея более детальные сведения о поведении траекторий потока, можно получить дополнительную информацию об иных, не сводящихся к двучленной асимптотике $N(\lambda)$, асимптотических характеристиках спектра. Один из возможных путей к этому — изучение «слабых» ненулевых особенностей обобщенной функции $\sigma(t)$ (п. 14.3). На этом пути получается, в частности, обобщение классической формулы Пуассона. Другой способ исследования спектра заключается в прямом построении приближенных собственных функций (п. 14.4, 14.5); как правило, это приводит к описанию лишь части спектра.

В этом параграфе A — либо с. с. эллиптический (псевдо)дифференциальный оператор на многообразии X без края, либо с. с. эллиптический дифференциальный оператор на многообразии X с краем Y при каком-нибудь регулярном краевом условии; $A>0$, $m=\operatorname{ord} A>0$, $N(\lambda)=N(\lambda^m, A)$. В первом случае F^t — бихарактеристический, во втором — биллиардный поток (подразумевается, что траектории не разветвляются на границе);

эти потоки введены в п. 13.3, 13.4. Как правило, многообразие X считается компактным; исключения ясны из контекста.

Положим

$$A_s(x, \xi) = m^{-1}(A_m(x, \xi))^{-(m-1)/m}(A_{m-1}(x, \xi) - \\ -\frac{1}{2i}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} A_m(x, \xi) - \frac{1}{2i}\sum_j \frac{\partial A_m}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\ln \mu(x));$$

на многообразии без края $A_s(x, \xi)$ представляет собой субглавный символ оператора $\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^{1/2} A^{1/m}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^{-1/2}$ (см. замечание 13.2).

14.1. Общая двучленная асимптотическая формула. Важнейшими характеристиками замкнутой траектории $\gamma_T = F^t(x, \xi)$, $0 \leqslant t < T$, где $F^T(x, \xi) = (x, \xi)$, являются ее период T и сдвиг фазы $\beta(T, x, \xi)$ (который определяется с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$). Для операторов на многообразии без края

$$\beta(T, x, \xi) = \beta_c(T, x, \xi) + \beta_s(T, x, \xi),$$

где $\beta_s(T, x, \xi) = -\int_0^T A_s(F^t(x, \xi))\,dt$, $\beta_c(T, x, \xi) = \alpha\pi/2$, α — *индекс Маслова* траектории γ_T (см. [111], [112], [254, т. 3]); β_c интерпретируется как *сдвиг фазы*, вызванный прохождением траектории через каустики (см. п. 14.5), β_s — как сдвиг фазы, порожденный субглавным символом. Индекс Маслова α может принимать лишь значения 0, 1, 2, 3, фазовый сдвиг β_s — любые значения из $\mathbf{R}^1$. На многообразии с краем сдвиг фазы происходит кроме того, при отражении траектории от границы. Если траектория не разветвляется, то «матрица» рассеяния $S(\lambda)$ из п. 13.6 имеет размерность 1×1, т. е. представляет собой комплексное число, по модулю равное 1. Сдвигом фазы при отражении называют величину $\operatorname{Arg} S(A_m(x, \xi))$; она зависит от главных символов оператора A и операторов, входящих в граничные условия. На многообразии с краем

$$\beta(T, x, \xi) = \beta_c(T, x, \xi) + \beta_s(T, x, \xi) + \beta_r(T, x, \xi),$$

где β_r — суммарный сдвиг фазы, вызванный отражениями траектории γ_T от границы. Ясно, что $\beta(T, x, \lambda\xi) = \beta(T, x, \xi)$, $\lambda > 0$.

Пример 14.1. Для оператора Лапласа—Бельтрами на римановом многообразии $\beta_s = 0$. На многообразии с краем при условии D каждое отражение сдвигает фазу на π, при условии N или третьем краевом условии — на 0 (т. е. сдвига не происходит).

Замкнутая траектория γ_T называется *примитивной*, если она не является многократным повторением траектории с периодом, меньшим T. Для $(x, \xi) \in \Pi$ (где Π — множество периодических точек потока F^t) обозначим через $T^0(x, \xi)$ положительный период примитивной траектории $F^t(x, \xi)$; разумеется, $T^0(x, \lambda\xi)=T^0(x, \xi)$, $\lambda>0$. Положим $\beta^0(x, \xi)=\beta(T^0(x, \xi), x, \xi)$. Множество $\Pi\subset T'X$ и функции T^0, β^0, заданные на Π, измеримы [139]. Старшие ненулевые особенности $\sigma(t)$ описываются с помощью этих функций следующим образом.

Теорема 14.1 ([139], [141]). Пусть X — многообразие без края, $\chi\in S(\mathbf{R}^1)$, $\tilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $0\in\operatorname{supp}\chi$. Тогда

$$\int\chi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=n(2\pi)^{-n}\int\limits_{\Pi\cap\{A_m<1\}}\sum_{k\in Z}\tilde{\chi}(kT^0)\times$$

$$\times\exp(ik\lambda T^0+ik\beta^0)\,dx\,d\xi\,\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}). \qquad (14.1)$$

На многообразии с краем аналогичное утверждение справедливо для $\sigma_\Gamma(t)$, где Γ — п. д. о., при условии, что $\operatorname{supp}\chi\subset(-T, T)$ и $\Gamma(x, \xi)=0$ в окрестности множества Ξ_T (определения см. в § 13).

Доказательство теоремы 14.1 основано на представлении ядра оператора $\exp(-itA^{1/m})$ в виде суммы осциллирующих интегралов (13.18). С точностью до более гладких слагаемых эти интегралы определяются по лагранжеву многообразию и главному символу интегрального оператора Фурье $\exp(-itA^{1/m})$. Поэтому «старшие» особенности обобщенной функции $\sigma(t)$ также зависят лишь от лагранжева многообразия и главного символа. Главный символ, в свою очередь, выражается через фазовый сдвиг, что и дает в итоге (14.1).

Из (14.1) и (13.16) с помощью теоремы 13.1 (для оператора на многообразии с краем применяется разложение $N(\lambda)$ в сумму $N_\Gamma(\lambda)+N_{I-\Gamma}(\lambda)$ — см. п. 13.4) выводится следующий результат.

Теорема 14.2 ([139], [141]). Положим

$$Q(\lambda)=n(2\pi)^{-n}\int\limits_{\Pi\cap\{A_m<1\}}\frac{[\pi-\lambda T^0(x, \xi)-\beta^0(x, \xi)]_{2\pi}}{T^0(x, \xi)}\,dx\,d\xi,$$

где $[\cdot]_{2\pi}$ означает вычет по модулю 2π: $[t]=t-2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $-\pi<[t]_{2\pi}\leqslant\pi$. Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+Q(\lambda-\varepsilon)\lambda^{n-1}-\varepsilon n a_0\lambda^{n-1}-o(\lambda^{n-1})\leqslant N(\lambda^m)\leqslant$$

$$\leqslant a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+Q(\lambda+\varepsilon)\lambda^{n-1}+\varepsilon n a_0\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}), \qquad (14.2)$$

где $a_1=-n(2\pi)^{-n}\int\limits_{\{A_m<1\}}A_s(x, \xi)\,dx\,d\xi$, $o(\lambda^{n-1})$ зависит, вообще говоря, от ε.

Преимущество такой формы записи асимптотики заключается в том, что для нее не требуется никаких дополнительных ограничений на поток F^t. Накладывая условия на функцию Q (а, значит, и на поток F^t), из (14.2) можно получить другие, менее общие формулы.

Если, например, Q равномерно непрерывна на $\mathbf{R}^1$, то, в силу произвольности ε, из (14.2) вытекает

$$N(\lambda^m)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+Q(\lambda)\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}); \qquad (14.3)$$

такую асимптотику называют *квазивейлевской.* Во всех известных нам примерах на множестве полной меры в Π функция $T^0(x, \xi)$ принимает не более чем счетное множество значений. В этой ситуации функция Q почти-периодична (по Г. Бору), и ее равномерная непрерывность равносильна непрерывности в каждой точке. В частности, когда $T^0(x, \xi)\equiv T^0=\mathrm{const}$ на множестве полной меры, функция Q периодична с периодом $2\pi T_0^{-1}$. Из определения видно, что функция Q является *осциллирующей*, т. е.

$$\int_0^\lambda Q(\mu)\,d\mu\leqslant\mathrm{const};$$

если она периодична, то ее интеграл по периоду равен нулю.

При $Q\equiv0$ из (14.3) получается обычная вейлевская формула (9.21). Для равенства $Q\equiv0$ достаточно, чтобы мера множества Π равнялась нулю (см. теоремы 13.4, 13.9). Однако, Q может тождественно обращаться в нуль и в случае, когда Π имеет ненулевую меру (см. [139]).

Предположим теперь, что функция Q имеет разрывы в точках μ_k, $\mu_k\to+\infty$. Тогда, в силу (14.2), можно построить сходящуюся к нулю положительную последовательность $\{\varepsilon_k\}$, для которой

$$N((\mu_k+\varepsilon_k)^m)-N((\mu_k-\varepsilon_k)^m)=$$
$$=(Q(\mu_k+0)-Q(\mu_k-0))\mu_k^{n-1}+o(\mu_k^{n-1}); \qquad (14.4)$$

более того, (14.4) выполняется для любой положительной последовательности $\{\varepsilon_k'\}$, сходящейся к нулю медленнее, чем $\{\varepsilon_k\}$. Если $Q(\mu_k+0)-Q(\mu_k-0)\geqslant c>0$, то (14.4) означает, что вокруг точек μ_k образуются стягивающиеся к μ_k при $k\to\infty$ группы собственных значений оператора $A^{1/m}$ с суммарной кратностью порядка μ_k^{n-1}. Такие группы собственных значений называются *кластерами.* Более подробно (при некоторых дополнительных ограничениях на оператор A) кластерные асимптотики будут рассмотрены в п. 14.2. Пока отметим лишь, что

$$Q(\mu+0)-Q(\mu-0)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{\Omega_\mu\cap\{A_m<1\}}(T^0(x, \xi))^{-1}dx\,d\xi,$$

где $\Omega_\mu=\{(x, \xi)\in\Pi : \mu T^0(x, \xi)+\beta^0(x, \xi)=0 \pmod{2\pi}\}$. Поэтому функция Q имеет разрывы в точках μ_k, для которых мера множества Ω_μ отлична от нуля. Отсюда, в частности, следует, что функция Q непрерывна всюду за исключением не более чем счетного множества точек.

Замечание 14.1. В [140] получена двусторонняя асимптотическая оценка вида (14.2) и для спектральной функции $e^A(\lambda^m; x, x)$ в случае, когда множество Π_x (см. § 13) имеет ненулевую меру; на многообразии с краем предполагается, что точка x регулярна (см. п. 13.5) и $x \in Y$.

Замечание 14.2. Для операторов с ветвящимися биллиардными траекториями двусторонняя оценка вида (14.2) установлена в [141]. Как показывают примеры, для таких операторов кластеры могут возникать и вокруг точек $\mu_k \to +\infty$, не являющихся точками разрыва функции Q; разумеется, тогда на последовательности точек μ_k нарушается равномерная непрерывность.

14.2. Операторы с периодическим бихарактеристическим потоком. Пусть A — оператор на связном многообразии X без края. Предположим, что все его бихарактеристики периодичны, тогда они имеют общий период T (см. [189]). Предположим также, что $\beta(T, x, \xi) \equiv \beta_0 = \mathrm{const}$; поскольку $\beta_c(T, x, \xi)$ непрерывно зависит от (x, ξ) на связных подмножествах $T'X$, это накладывает ограничение лишь на $A_s(x, \xi)$. Указанными свойствами обладает, например, оператор Лапласа на многообразии с периодическим геодезическим потоком (кроме очевидных примеров симметрических пространств ранга $1: S^n$, $\mathbf{R}^n\mathbf{P}$, $\mathbf{C}^n\mathbf{P}$, $\mathbf{H}\mathbf{P}^n$, $\mathrm{Ca}\mathbf{P}^n$, имеется довольно богатый набор таких многообразий — см. [189]).

В силу (14.2) в этих условиях с точностью до $o(\lambda^{n-1})$ все собственные значения оператора $A^{1/m}$ содержатся в объединении интервалов вида $(\mu_k + \varepsilon_k, \mu_k - \varepsilon_k)$, где $\mu_k = (2\pi k - \beta_0) T^{-1}$, $\varepsilon_k \to 0$. Этот результат можно уточнить.

Теорема 14.3 ([203], [221]). При сделанных предположениях все собственные значения оператора $B = A^{1/m}$ содержатся в объединении интервалов вида

$$(\mu_k - k^{-1} r, \ \mu_k + k^{-1} r) \tag{14.5}$$

при некотором $r > 0$. Обратно, если для любого $\varepsilon > 0$ все достаточно большие собственные значения эллиптического самосопряженного п. д. о. B порядка 1 содержатся в интервалах $(\nu_k - \varepsilon, \nu_k + \varepsilon)$, где ν_k — арифметическая прогрессия, то все бихарактеристики оператора B периодичны и имеют общий период T, фазовый сдвиг $\beta(T, x, \xi) = \beta_0$ не зависит от (x, ξ), и $\nu_k = (2\pi k - \beta_0) T^{-1}$.

Приведем набросок доказательства первого утверждения. Рассмотрим интегральный оператор Фурье $U(T) = \exp(-iTB)$. Поскольку бихарактеристический поток T-периодичен, $U(T)$ представляет собой п. д. о. (см. пример 13.1). Вычисления показывают, что его главный символ равен $\exp(-i\beta_0)$ (см., например, [254, т. 4]). Таким образом, $U(T) = \exp(-i\beta_0) \cdot I + C$, где C — коммутирующий с B п. д. о. порядка -1. Следовательно, для собственных значений λ_j оператора B выполнено соотношение $\exp(-iT\lambda_j)=(1+O(\lambda_j^{-1}))\exp(i\beta_0)$, или $i(T\lambda_j+\beta_0)=\mathscr{L}n(1+O(\lambda_j^{-1}))$, где $\mathscr{L}n$ — какое-то из значений логарифма. Отсюда видно, что собственные значения λ_j, близкие к $2\pi kT^{-1}$, имеют вид $2\pi kT^{-1}-\beta_0 T^{-1}+O(k^{-1})$, что и утверждалось.

Обозначим через δ_k суммарную кратность собственных значений λ_{jk}, лежащих в интервале (14.5).

Теорема 14.4 ([205]). Предположим, что все бихарактеристики «длины» T — примитивные. Тогда $\delta_k=R(k)$ при достаточно больших k, где $R(k)$ — некоторый полином степени $n-1$;

$$R(k)=n(k-\beta_c(T)/2\pi)^{n-1}T^{-n}\int\limits_{\{A_m<1\}}dx\,d\xi+O(k^{n-3}),$$

где $\beta_c(T)=\beta_c(T,x,\xi)$ (в этом случае $\beta_c(T,x,\xi)$ не зависит от x,ξ).

Распределение собственных значений в кластере описывается с помощью последовательности мер $\mathscr{M}_k(t)=\sum\limits_{j_k}\delta\left(t-(\lambda_{j_k}^2-\mu_k^2)\right)$, имеющих носители в интервалах

$$((\mu_k-k^{-1}r)^2-\mu_k^2,\quad (\mu_k+k^{-1}r)^2-\mu_k^2).$$

Меры $\mathscr{M}_k$ допускают асимптотическое разложение (в смысле теории распределений)

$$\mathscr{M}_k(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}k^{n-1-j}m_j(t),$$

где $m_j(t)$ — меры на интервале $(-4\pi rT^{-1}-\varepsilon,\ 4\pi rT^{-1}+\varepsilon)$, называемые *кластерными инвариантами* [205].

Пример 14.2. *Оператор Шрёдингера на компактном многообразии.* Пусть $A=-\Delta+q$, где $-\Delta$ — оператор Лапласа на римановом многообразии X, имеющем T-периодический геодезический поток $q\in C^\infty(X)$. Пусть $\tilde{q}(x,\xi)$ — среднее значение $q(x)$ (как функции на $T'X$) вдоль геодезической, выходящей из точки x в направлении $\xi/|\xi|$. (На сфере отображение $q\mapsto\tilde{q}$ совпадает с преобразованием Радона). Тогда мера $m_0(t)$ имеет вид

$$\langle m_0, f\rangle=n\int\limits_{\{A_1<1\}}f(\tilde{q}(x,\xi))\,dx\,d\xi. \tag{14.6}$$

Формулу (14.6) можно рассматривать как далекое обобщение классической теоремы Сеге об асимптотическом поведении собственных чисел тёплицевых матриц (эта теорема отвечает случаю $X=S^1$). Подробнее об этом аспекте теории см. в [190].

14.3. „Слабые" ненулевые особенности $\sigma(t)$. Классическая формула Пуассона в одномерном случае имеет вид $\sum_k \exp(ikt)=2\pi\sum_k \delta(t-2\pi k)$. Левую часть в ней можно трактовать как след оператора $2\cos(-itA^{1/2})-1$, где $(-A)$ — оператор Лапласа на окружности S^1, а числа $2\pi k$ в правой части — как периоды замкнутых геодезических на S^1. Таким образом, эта формула дает полное описание особенностей обобщенной функции $\mathrm{Tr}\cos(-itA^{1/2})$ для оператора Лапласа на S^1. Похожий (хотя и значительно менее точный) результат можно получить и для более общих операторов.

Пусть вначале X — многообразие без края, $\vartheta\in T'X$, $\gamma=F^t\vartheta$, $0\leqslant t<T$, — замкнутая бихарактеристика оператора A с периодом T. Рассмотрим касательное отображение в точке ϑ:

$$(dF^T)_\vartheta=T_\vartheta T'X\rightarrow T_\vartheta T'X.$$

Оно имеет собственный вектор ω (касательный вектор γ в точке ϑ) с собственным значением 1. Если остальные собственные значения $(dF^T)_\vartheta$ отличны от единицы, то бихарактеристика γ называется *невырожденной*, а сужение $(dF^T)_\vartheta$ на инвариантное подпространство, дополнительное к ω, называется *отображением Пуанкаре* и обозначается через P_γ. Отображения Пуанкаре P_γ для разных точек $\vartheta\in\gamma$ сопряжены друг другу (т. е. $P_\gamma(\vartheta_1)=C^{-1}P_\gamma(\vartheta_2)C$ для некоторого невырожденного линейного преобразования C).

Теорема 14.5 ([221]). Пусть в условиях теоремы 13.3 $T>0$ — изолированная точка множества периодов $\mathscr{L}(X)$. Предположим, что существует лишь конечное число бихарактеристик γ с периодом T и все они невырождены. Тогда

$$\begin{gathered}\sigma(t)-(2\pi i)^{-1}\sum_\gamma|\det(I-P_\gamma)|^{-1/2}\exp(i\beta_\gamma)\times\\ \times T^0_\gamma(t-T-i0)^{-1}\in L_{1,\mathrm{loc}}\end{gathered}\tag{14.7}$$

в окрестности точки T; здесь β_γ — сдвиг фазы на бихарактеристике γ, T_γ^0 — период примитивной бихарактеристики, кратной которой является γ.

Замечание 14.3. В [221], [242] в аналогичной формуле неправильно указан коэффициент перед суммой по γ.

Условие невырожденности в теореме 14.5 можно ослабить. Достаточно предположить что множество бихарактеристик с периодом T состоит из нескольких гладких подмногообразий Z_j размерности d_j, которые являются *чистыми*: для всех $\vartheta\in Z_j$ множество неподвижных точек отображения $(dF^T)_\vartheta$ совпадает с касательным пространством к Z_j в ϑ (случай $d_j=1$) отвечает невырожденности). Характер сингулярности $\sigma(t)$ в точке $t=T$ зависит от размерностей d_j: если $\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\operatorname{supp}\rho\cap\mathscr{L}(X)=T$, то в асимптотике функции $(\widetilde{\rho\sigma})(\lambda)$, $\lambda\to+\infty$, каждому многообразию Z_j отвечает ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{jk}\lambda^{-k+(d_j-1)/2}$, $c_{jk}=\mathrm{const}$ (см. [221]).

Пусть теперь X — риманово многообразие с краем Y, A — оператор Лапласа со знаком «—» при краевом условии Дирихле или третьем краевом условии. Предположим, что многообразие X *геодезически строго выпукло* (это означает, что любой отрезок геодезической γ, соединяющий две достаточно близкие точки границы x_1 и x_2, лежит в $X\setminus Y$ и $\max\limits_{x\in\gamma}\operatorname{dist}(x,Y)\geqslant\geqslant c(\operatorname{dist}(x_1,x_2))^2$). Тогда биллиардный поток F^t определен на всем $T'X$: любая биллиардная траектория бесконечно продолжается в обе стороны и является локально конечнозвенной. Обозначим через G^t геодезический поток на $T'Y$, отвечающий индуцированной из X римановой метрике; его траектории называются *скользящими лучами*.

Теорема 14.6 ([242]). При сделанных предположениях сингулярный носитель распределения $\sigma(t)=\operatorname{Tr}\exp(-itA^{1/2})$ содержится в объединении множества периодов замкнутых биллиардных траекторий $\mathscr{L}(X)$ и множества $\mathscr{L}(Y)$ периодов замкнутых скользящих лучей.

Этот результат уточняет теорему 13.6, которая доказывалась явным построением $U_\Gamma(t)$ методами теории интегральных операторов Фурье. На многообразии с краем построение $U(t)$ пока недоступно, и доказательство теоремы 14.6 опирается на глубокий анализ распространения особенностей гиперболических краевых задач.

Точно так же, как на многообразии без края, определим невырожденные замкнутые биллиардные траектории и отображения Пуанкаре P_γ. В рассматриваемой ситуации особенности обобщенной функции $\sigma(t)$, отвечающие таким траекториям, описываются той же формулой.

Теорема 14.7 ([242]). Пусть $T>0$ является изолированной точкой множества периодов $\mathscr{L}(X)\cup\mathscr{L}(Y)$ и $T\overline{\in}\mathscr{L}(Y)$. Предположим, что существует лишь конечное число биллиардных траекторий γ с периодом T и все они невырождены. Тогда в окрестности точки T выполняется (14.7) (в β_γ, разумеется, включается фазовый сдвиг, вызванный отражениями).

Для вырожденных замкнутых траекторий (14.7) теряет смысл, однако можно показать, что они также порождают особенности обобщенной функции $\sigma(t)$.

Результаты этого пункта могут быть в определенном смысле перенесены на операторы с непустым существенным спектром. Пусть, например, A — оператор $-\Delta_D$ в области $X\subset\mathbf{R}^n$, являющейся дополнением некоторого компакта. Подобно тому, как в ограниченной области решения волнового уравнения имеют вид

$$\sum_k (w_k^+ \exp(i\sqrt{\lambda_k}t) + w_k^- \exp(-i\sqrt{\lambda_k}t)),$$

где λ_k — собственные значения оператора Лапласа, в рассматриваемом случае для решений волнового уравнения имеет место представление $u(x, t) = \sum_k w_k(x) \exp(i\mu_k t)$. В нем μ_k — некоторые комплексные числа, $\operatorname{Im}\mu_k > 0$, $w_k(x)$ — решения уравнения Гельмгольца $\mu_k^2 w_k + \Delta w_k = 0$ в X с условиями Дирихле на ∂X и условиями излучения $w_k \sim c_k |x|^{-(n-2)} \exp(\operatorname{Im}\mu_k |x|)$ на бесконечности. Роль $\sigma(t)$ здесь играет обобщенная функция $\sum \exp(i\mu_k t)$. При некоторых предположениях можно доказать, что ее особенности содержатся в множестве периодов периодических биллиардных траекторий в X. В частности, если X имеет строго выпуклое дополнение, то единственный возможный период — нулевой, и $\operatorname{sing\,supp} \sigma = \{0\}$. На рассматриваемую ситуацию обобщается и теорема 14.7 ([181], [199], [281], [286]). По поводу связи этих результатов с теорией рассеяния см. [286].

14.4. Квазимоды. В силу спектральной теоремы (теоремы 1.2), если A — с. с. оператор с дискретным спектром, $u \in D(A)$ и $\|Au - \lambda u\| < \varepsilon \|u\|$, то в ε-окрестности числа λ найдется собственное значение оператора A. Кроме того, как следует из оценки

$$\|E^A((\lambda - \delta, \lambda + \delta)) u - u\| \leqslant \delta^{-1} \|Au - \lambda u\|,$$

тогда функция u близка к своей проекции на инвариантное подпространство оператора A, отвечающее спектру в окрестности точки λ. Такие «приближенные собственные функции» u принято называть *квазимодами.*

Если в δ-окрестности точки λ имеется только одно (причем простое) собственное значение, то квазимода u не более, чем на $\delta^{-1}\varepsilon\|u\|$, отличается от настоящей собственной функции. Если же суммарная кратность спектра в этой окрестности больше единицы, то квазимода u аппроксимирует, вообще говоря, не какую-либо собственную функцию, а некоторую их линейную комбинацию. Недостаточный учет этого обстоятельства может привести к ошибочным результатам о кратности собственных значений. В частности, согласно теореме 8.3, в типичной ситуации у плоской области X, допускающей группу изометрий $\mathbf{Z}_p$, собственные значения являются однократными и двукратными. В то же время для таких областей обычные методы построения квазимод (см. п. 14.5) приводят к p квазимодам, циклически переставляемым при поворотах области. Как указал В. И. Арнольд [5], эти квазимоды заведомо не близки к настоящим собственным функциям.

Для получения правильных результатов о кратности собственных значений требуется, чтобы построенные квазимоды были «почти ортогональны». Соответствующий абстрактный результат принадлежит В. Ф. Лазуткину [87], [88].

Теорема 14.8. Пусть A — с. с. оператор с дискретным спектром, и для некоторой последовательности квазимод u_k и чисел $\lambda_k \to \infty$ имеет место оценка $\| Au_k - \lambda u_k \| \leqslant c\lambda_k^{-\nu} \| u_k \|$. Если, кроме того, $|(u_k, u_l)| \leqslant c(\lambda_k + \lambda_l)^{-1} \| u_k \| \| u_l \|$, то существует последовательность собственных значений μ_k оператора A, таких, что $|\mu_k - \lambda_k| \leqslant c^2 \lambda_k^{-\nu}$.

14.5. Построение квазимод. При построении квазимод используется аппарат, разработанный первоначально в математической теории дифракции и распространения коротких волн. Здесь, как и в методе гиперболического уравнения, возникают уравнения переноса, гамильтонов поток и лагранжевы многообразия. Это не случайное совпадение. Фактически методы построения асимптотики по гладкости решений эволюционных уравнений, намеченные в § 13, и методы построения асимптотики решений по большому параметру являются реализациями единой математической теории — *метода канонического оператора В. П. Маслова*. По этому поводу см. [110]—[113].

Пусть для простоты A — оператор Лапласа—Бельтрами на n-мерном римановом многообразии X, для начала — без края. Квазимоду — приближенное решение уравнения $-\Delta u = \lambda u$, $\lambda = \mu^2$, — будем искать в виде

$$u = u(x; \mu) = e^{i\mu\tau(x)} \varphi(x; \mu), \tag{14.8}$$

где $\varphi(x; \mu)$ разлагается в асимптотический ряд по степеням μ. Подстановка (14.8) в исходное уравнение приводит к уравнению эйконала $|\nabla\tau| = 1$, где $|\xi|$ — длина ковектора ξ в римановой метрике. Это уравнение решают методом Гамильтона—Якоби (ср. п. 13.3). Для этого рассматривают гамильтонову систему на $T'X$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \xi}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial g}{\partial x}, \tag{14.9}$$

где g — главный символ оператора — Δ. На некоторой гиперповерхности $S \subset X$ задается начальное значение эйконала $\tau = \tau_0$ и его градиента $\nabla\tau_0$, $|\nabla\tau_0| = 1$, и из точек $(x, \nabla\tau_0(x)) \in T'X|_S$ выпускаются траектории системы (14.9). Они заполняют некоторое n-мерное лагранжево многообразие $\Lambda \subset T'X$. При достаточно малых t соответствующая часть лагранжева многообразия неособо проектируется на X. На этой проекции эйконал τ определяется по формуле

$$\tau(x_1) = \tau(x_0) + \int_{\gamma(x_0, x_1)} \xi dx,$$

где $\gamma(x_0, x_1)$ — траектория, соединяющая точку $x_0 \in S$ с x_1. Далее для отдельных членов разложения амплитуды $\varphi(x; \mu)$ так же, как в п. 13.3, получается рекуррентная система линейных уравнений переноса вдоль траекторий (14.9). Таким образом, на некоторой части X вблизи S квазимода может быть построена с любым порядком точности в виде (14.8).

Если траектории продолжить достаточно далеко по t, то Λ, вообще говоря, уже не будет диффеоморфно проектироваться на X. В окрестности множества точек $x \in X$, в которые Λ проектируется особо, — каустики — представление (14.8) не годится. Квазимода в окрестности каустики представляется либо через специальные функции (в частности, *функции Эйри* — см. [10]), либо с помощью канонического оператора [111], [112]. Эти представления также связываются с многообразием Λ; они являются аналогами (13.18). Двигаясь по траекториям дальше, мы вновь попадем в часть Λ, неособо проектирующуюся на X. Здесь снова действует представление (14.8), но уже с другим эйконалом τ', отличающимся на каустике от τ на $k\pi/2$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}$. Иначе говоря, при переходе через каустику происходит сдвиг фазы на $k\pi/2$.

Для того, чтобы описанный процесс завершился построением квазимоды, требуется выполнение нескольких условий. Необходимо, чтобы Λ было компактным многообразием без края. Тогда вне каустик на проекции Λ на X будет построена квазимода в виде суммы нескольких слагаемых типа (14.8) по числу прообразов при проектировании, а вне этой проекции квазимода будет экспоненциально убывать по μ. Кроме того, для однозначности квазимоды требуется, чтобы при обходе вдоль любого замкнутого контура на Λ эйконал менялся на число, кратное 2π. Если $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ — циклы на Λ, порождающие одномерную группу гомологий Λ, то этому требованию отвечают N условий квантования, имеющих вид

$$\mu \int_{\Gamma_j} \xi dx - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} \Gamma_j = 0 \pmod{2\pi}, \tag{14.10}$$

где $\operatorname{Ind} \Gamma_j$ — индекс Маслова цикла Γ_j (см. [112], [254]), учитывающий скачки эйконала при переходе через каустику.

Лагранжево многообразие Λ, по которому строится квазимода, выбирается неоднозначно — оно задается начальными условиями для уравнения эйконала. Разумеется, Λ может оказаться некомпактным, кроме того, для него ни при каком μ могут не выполняться условия квантования. В связи с этим, для реализации изложенной схемы построения квазимод, как правило, нужно иметь достаточно богатый запас подходящих лагранжевых многообразий. Пусть, например, нам удалось построить $(N-1)$-параметрическое непрерывное семейство компактных лагранжевых многообразий, инвариантных относительно сдвига по траекториям (14.9). Тогда система N уравнений (14.10) служит для определения «допустимых» значений параметров и «квазисобственных чисел» $\lambda=\mu^2$. Однако, в многомерной ситуации трудно найти достаточно богатые семейства компактных лагранжевых многообразий: как известно из теории А. Н. Колмогорова — В. И. Арнольда — Мозера [6], таких непрерывных семейств в типичной ситуации не существует. По этой причине почти всегда построение квазимод требует усовершенствования изложенного метода.

В [10] исходным объектом является одна замкнутая траектория $\gamma\subset\Lambda$. Если гамильтонов поток устойчив на γ, в первом приближении, то вблизи γ можно построить гамильтонову систему, близкую к исходной, но уже имеющую вблизи γ нужное семейство инвариантных лагранжевых многообразий. Квазимоды, построенные по многообразиям этого семейства, лежащим достаточно близко от γ, служат квазимодами и для исходного оператора.

Этот метод распространяется и на случай многообразий с краем (см. [10]). В случае оператора Лапласа в выпуклой области на этом пути выделяется два класса квазимод — типа *прыгающего мячика*, сосредоточенные вблизи устойчивой замкнутой траектории биллиардного потока, и типа *шепчущей галереи*, отвечающие последовательности таких замкнутых траекторий, сходящейся к замкнутой геодезической на границе области; такие квазимоды оказываются сосредоточенными в малой окрестности границы.

В другом варианте (см. например, [110]) строится комплексный эйконал $\tau(x)$, вещественный на проекции $\gamma_0=\pi\gamma\in X$ замкнутой траектории γ и имеющий положительную мнимую часть вне γ_0. При этом вне γ_0 комплексное уравнение эйконала (а также уравнение переноса) можно решать с точностью до $O((\operatorname{Im}\tau)^k)$, $k>0$. Тем самым задается росток комплексного лагранжева многообразия в γ. Поскольку построенные по этому ростку квазимоды экспоненциально по λ убывают вне γ_0, здесь можно отказаться от требования замкнутости многообразия Λ, и из всех условий квантования (14.10) остается лишь одно, соответствующее γ. Построенные квазимоды оказываются сосредоточенными вблизи γ_0.

Необходимо отметить, что все эти методы дают, как правило, приближение лишь незначительной части спектра, поскольку обычно замкнутых траекторий достаточно мало (например, на многообразии отрицательной кривизны множество периодических траекторий счетно). Эта трудность в значительной степени была преодолена в работах В. Ф. Лазуткина [87] и Колена де Вердье [204], где в исходном методе построения квазимод по семействам лагранжевых многообразий удалось отказаться от требования непрерывности семейства, и ограничиться разрывными семействами, параметризованными канторовыми множествами положительной меры. Наличие таких семейств оказывается уже типичным свойством — см. [87]. На этом пути удалось, построив квазимоды, приблизить подпоследовательность собственных значений, имеющую относительную плотность, равную относительной мере части фазового пространства $T'X$, заполненной рассматриваемыми лагранжевыми многообразиями. Анализ биллиардного потока показал, например, что для выпуклой области на плоскости, приближающейся к кругу, эта мера становится сколь угодно близкой к единице [87]. В [87] высказана гипотеза, что детальный анализ гамильтоновой системы позволит построить квазимоды, приближающие часть спектра единичной плотности.

В заключение отметим, что аналогичными методами можно построить квазимоды и для (псевдо) дифференциального оператора $A(x, hD_x)$ с малым параметром при производных, т. е. функции $u(x; h)$, дающие малую при $h \to 0$ невязку в уравнении $A(x, hD_x)u = \lambda(h)u$; см. [111], [112].

§ 15. Метод приближенного спектрального проектора

15.1. Основная идея. Метод приближенного спектрального проектора (п. с. п.) предложен В. Н. Туловским и М. А. Шубиным [148] (см. также изложение этой работы в [162]) и в дальнейшем использовался и развивался в работах В. Л. Ройтбурда [136] (см. также [162], добавление 2), В. И. Фейгина [150]—[152], Хёрмандера [252], [253], В. И. Безяева [11], [12], Т. Е. Богородской и М. А. Шубина [30] и в особенности С. З. Левендорского (см. работы [90]—[94], [278], [279] и имеющиеся в них ссылки). Основная идея метода кратко изложена в [65, § 8], а также в § 9 этой статьи. Изложим эту идею в более общем контексте.

Пусть мы хотим найти асимптотику при $t \to +\infty$ числа $N(0; A_t)$ отрицательных собственных значений самосопряженного оператора A_t, зависящего от некоторого параметра $t > 0$ и заданного в некотором функциональном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Мы будем предполагать, если не оговорено противное, что $\mathcal{H} = L_2(X)$, где X — область в $\mathbf{R}^n$. Вместо этого, как правило, можно считать, что X — гладкое многообразие (возможно с краем). Этот случай обычно сводится к случаю области в $\mathbf{R}^n$ с помощью локальных рассмотрений с последующим применением разбиения единицы. Кроме того, можно считать, что $\mathcal{H} = (L_2(X))^p$, где $p \geqslant 1$ — целое, т. е. элементы $\mathcal{H}$ — вектор-функции на X со значениями в $\mathbf{C}^p$ так что A_t — матричный $p \times p$-оператор. Это тоже, как правило, не вносит принципиальных трудностей.

Пусть A_t — (псевдо) дифференциальный оператор в X с символом Вейля $a_t = a_t(x, \xi)$. Поскольку мы считаем оператор A_t самосопряженным (например, полученным как расширение по Фридрихсу с $C_0^\infty(X)$), a_t будет вещественнозначной функцией (эрмитовозначной в матричном случае).

Пусть $\chi_{(-\infty,0)}$ — характеристическая функция полуоси $(-\infty, 0)$. Тогда можно ожидать, что спектральный проектор оператора A_t, соответствующий полуоси $(-\infty, 0)$, т. е. оператор $\chi_{(-\infty,0)}(A_t)$ будет в каком-то смысле близок к оператору с символом $\chi_{(-\infty,0)}(a_t)$. След последнего оператора и задает предполагаемую вейлевскую асимптотику

$$N(0;\ A_t) \sim (2\pi)^{-n} \int\limits_{a_t(x,\xi)<0} dx d\xi = \\ = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{(x,\ \xi): a_t(x,\ \xi)<0\}, \tag{15.1}$$

в скалярном случае и

$$N(0;\ A_t) \sim (2\pi)^{-n} \int N(0;\ a_t(x,\ \xi))\, dx d\xi, \tag{15.1$'$}$$

в более общем матричном случае.

Однако непосредственное использование оператора с разрывным символом $\chi_{(-\infty,0)}(a_t)$ невозможно, т. к. необходимый для этого аналитический аппарат не развит. Основная идея метода п. с. п. состоит в том, чтобы рассмотреть ту или иную регуляризацию этого символа. При этом необходимые оценки получаются с помощью техники псевдодифференциальных операторов, причем каждое усовершенствование этой техники обычно дает продвижение в использовании метода п. с. п.

Метод п. с. п. занимает промежуточное положение между вариационными и тауберовыми методами. Будучи основан на вариационных принципах, он в то же время использует и некоторые рассуждения, характерные для тауберовых методов. Он применим, практически во всех задачах «с гладкими коэффициентами» и дает оценку остатка в асимптотиках типа (15.1), хотя и менее точную, чем метод гиперболического уравнения (в тех случаях, когда оба метода применимы).

Укажем редукцию других задач об асимптотике спектра к задаче об асимптотике $N(0; A_t)$.

В задаче об асимптотике стандартной функции распределения собственных значений $N(\lambda;\ A)$ (см. 1.11)) для полуограниченного снизу оператора A надо положить $A_t = A - tI$. При этом асимптотика (15.1) переходит в классическую вейлевскую асимптотику (9.3) (с $\lambda = t$). Если при этом A — эллиптический оператор порядка m, то в качестве a_t можно брать $a_m(x, \xi) - t$, где a_m — главный символ оператора A. Такая замена полного символа на главный приводит к эквивалентной асимптотике и может применяться во всех случаях, когда удается выделить какие-то главные члены в символе a_t.

При рассмотрении квазиклассической асимптотики (при $h \to +0$) для $N(\lambda; A_h)$, где $A_h = a(x, hD_x)$, надо взять $t = h^{-1}$, считая λ фиксированным. В задаче на собственные значения вида $Au=\lambda Bu$ с положительным оператором B и с полуограниченным снизу оператором A надо взять $A_t=A-tB$. При этом формула (15.1) приобретет вид

$$N(\lambda; A, B) \sim (2\pi)^{-n}\mathrm{mes}\{(x, \xi) : a(x, \xi)<\lambda b(x, \xi)\}, \qquad (15.2)$$

где $N(\lambda; A, B)$ — число собственных значений задачи $Au=\lambda Bu$, не превосходящих λ, а a, b — (главные) символы операторов A и B.

Часто встречаются задачи, в которых надо найти асимптотику числа $N((\alpha, \beta), A_t)$ собственных значений оператора A_t, лежащих в интервале (α, β), где $\alpha>-\infty$. В этом случае можно взять такую вещественную функцию $f=f(\lambda)$, что $N((\alpha, \beta), A_t)=N(0, f(A_t))$ и дело опять сводится к обсуждаемому случаю. (В качестве f обычно берут рациональную функцию, чтобы легче было работать с оператором $f(A_t)$.) Таким образом можно, например, исследовать асимптотику собственных значений, накапливающихся к границе существенного спектра рассматриваемого оператора.

Иногда для применения метода п. с. п. приходится рассматривать *операторные символы*. Так обстоит дело, например, в теории вырождающихся операторов и граничных задач, а также для операторов Шрёдингера с некоторыми неотрицательными, но не стремящимися к $+\infty$ потенциалами. В этом случае обычно по-прежнему верна формула (15.1′), в которой a_t — операторный символ, но соответствующая скалярная формула может оказаться неверной.

15.2. Операторные оценки. Для реализации метода п. с. п. обычно строят такие самосопряженные операторы $\mathscr{E}_t^\pm$, как бы аппроксимирующие проектор $\chi_{(-\infty,0)}(A_t)$ снизу и сверху, что если подпространства $L_t^\pm$ являются образами спектральных проекторов $\chi_{[1/2,+\infty)}(\mathscr{E}_t^\pm)$ операторов $\mathscr{E}_t^\pm$, соответствующих лучу $[1/2, +\infty)$, то

$$(A_tu, u)<0 \quad \text{при} \quad u\in L_t^-\setminus\{0\}, \qquad (15.3)$$

$$(A_tu, u)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad u\in(L_t^+)^\perp\cap D(A_t), \qquad (15.4)$$

где $(L_t^+)^\perp$ — ортогональное дополнение L_t^+ в $\mathscr{H}$, а $D(A_t)$ — область определения A_t. Ввиду леммы Глазмана (1.13), из (15.3) и (15.4) следует, что

$$\dim L_t^- \leqslant N(0; A_t)\leqslant \dim L_t^+. \qquad (15.5)$$

Таким образом, нужно построить операторы $\mathscr{E}_t^\pm$ и оценить размерности соответствующих подпространств $L_t^\pm$. Эта оценка размерностей первоначально делалась с помощью оценки ядерной нормы $\|(\mathscr{E}_t^\pm)^2-\mathscr{E}_t^\pm\|_1$, где $\|K\|_1=\mathrm{Tr}\sqrt{K^*K}$ (см. [148], [162], [252], [253]). А именно, если вообще $\mathscr{E}$ — ядерный самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, $L=\chi_{[1/2,+\infty)}(\mathscr{E})\mathscr{H}$ — образ соответствующего спектрального проектора, то

$$|\dim L-\mathrm{Tr}\mathscr{E}|\leqslant 2\|\mathscr{E}^2-\mathscr{E}\|_1, \tag{15.6}$$

что дает двустороннюю оценку для $\dim L$. Неравенства (15.3) и (15.4) могут быть проверены исходя из некоторых неравенств, не содержащих явно $L_t^{\pm}$. А именно, с точностью до замены строгого неравенства в (15.3) нестрогим достаточно, например, доказать неравенства

$$(A_t\mathscr{E}_t^- u, \mathscr{E}_t^- u)\leqslant 0, \quad u\in\mathscr{H}, \tag{15.7}$$

$$(A_t(u-\mathscr{E}_t^+ u), (u-\mathscr{E}_t^+ u))\geqslant 0, \quad u\in D(A_t), \tag{15.8}$$

по-существу, являющиеся разновидностями неравенства Гординга. Младшие члены, как правило, присутствующие в неравенствах типа Гординга, здесь обычно ликвидируются выбором достаточно большого t или подходящим исправлением «почти проекторов» $\mathscr{E}_t$. А именно, пусть, например, мы занимаемся задачей об асимптотике обычной функции распределения $N(\lambda)$ для оператора A, т. е. $A_t=A-tI$. Тогда если построены такие самосопряженные операторы $\mathscr{F}_t$, что

$$((A-tI)\mathscr{F}_t u, \mathscr{F}_t u)\leqslant M(u, u), \; u\in\mathscr{H},$$

то легко доказать неравенство

$$((A-tI-4MI)\mathscr{F}_t u, \mathscr{F}_t u)\leqslant 0, \quad u\in\mathscr{H},$$

откуда, заменяя t на $t-4M$, получаем

$$((A-tI)\mathscr{F}_{t-4M}u, \mathscr{F}_{t-4M}u)\leqslant 0, \quad u\in\mathscr{H},$$

т. е. в качестве $\mathscr{E}_t^-$ можно взять $\mathscr{F}_{t-4M}$. Аналогично, если построены такие операторы $\mathscr{F}_t$, что

$$((A-tI)(u-\mathscr{F}_t u), u-\mathscr{F}_t u)\geqslant -M(u, u), \quad u\in D(A),$$

то

$$((A-(t-4M)I)(I-\mathscr{F}_t)u, (I-\mathscr{F}_t)u)\geqslant 0, \quad u\in D(A),$$

и можно взять $\mathscr{E}_t^+=\mathscr{F}_{t+4M}$.

Входящая в (15.6) ядерная норма оператора $\mathscr{E}^2-\mathscr{E}$ неудобна для оценки, т. к. не имеет явного аналитического выражения. В. И. Фейгин [150] предложил способ действий, позволяющий обойтись без этой оценки, хотя и дающий худшую оценку остаточного члена. Этот способ состоит в том, чтобы проверить неравенства $-1/2I\leqslant\mathscr{E}_t\leqslant 3/2I$, а затем перейти к рассмотрению оператора

$\mathscr{E}_{1t}=\mathscr{E}_t^2(3-2\mathscr{E}_t)$. Заметим, что функция $f(x)=x^2)3-2x)$ обладает следующими свойствами: $f(0)=0$, $f(1)=1$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ при $x\in[-1/2, 3/2]$. Поскольку $\mathscr{E}_{1t}=f(\mathscr{E}_t)$, то $0\leqslant\mathscr{E}_{1t}\leqslant I$, откуда $0\leqslant\mathscr{E}_{1t}^2-\mathscr{E}_{1t}^2\leqslant I$. При этом если $\mathscr{E}_t$ — проектор, то $\mathscr{E}_{1t}$ также является проектором, а очевидное теперь равенство $\|\mathscr{E}_{1t}^2-\mathscr{E}_{1t}\|_1=\operatorname{Tr}\left(\mathscr{E}_{1t}^2-\mathscr{E}_{1t}\right)$ показывает, что оценку ядерной нормы можно заменить оценкой следа. В качестве примера приведем одно точное утверждение, доказанное В. И. Фейгиным [150] и выделенное в абстрактной форме В. И. Безяевым [12]. Оно относится к случаю $A_t=A-tI$.

Предложение 15.1. Пусть A — полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть существуют такие два семейства $\{\mathscr{E}_t^{\pm}, t\geqslant 1\}$ ядерных операторов в $\mathscr{H}$, что оператор $A\mathscr{E}_t^-$ ограничен, $\mathscr{E}_t^+\mathscr{H}\subset D(A)$ и выполнены следующие условия, в которых $\mathscr{E}_{1t}^{\pm}=(\mathscr{E}_t^{\pm})^2\left(3-2\mathscr{E}_t^{\pm}\right)$:

1) $-\frac{1}{2}I\leqslant\mathscr{E}_t^{\pm}\leqslant\frac{3}{2}I$;

2) $\mathscr{E}_{1t}^-(A-tI)\mathscr{E}_{1t}^-\leqslant ct^{1-\nu}I$, где $0<\nu<1$, c — некоторая положительная постоянная;

3) $\left(I-\mathscr{E}_{1t}^+\right)(A-tI)\left(I-\mathscr{E}_{1t}^+\right)\geqslant -ct^{1-\nu}I$;

4) $\operatorname{Tr}\mathscr{E}_{1t}^{\pm}=V(t)+O\left(W\left(t, ct^{1-\nu}\right)\right)$ при $t\to+\infty$, где $V(t)$ — неубывающая положительная функция, $V(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$,

$$W(t,\tau)=V(t+\tau)-V(t-\tau),\quad t,\ \tau\geqslant 0;$$

5) $\operatorname{Tr}\left(\mathscr{E}_{1t}^{\pm}\left(I-\mathscr{E}_{1t}^{\pm}\right)\right)=O\left(W\left(t, ct^{1-\nu}\right)\right)$ при $t\to+\infty$.

Тогда оператор A имеет дискретный спектр и для соответствующей функции распределения $N(t)$ имеет место асимптотика

$$N(t)=V(t)+O\left(W\left(t, ct^{1-\nu}\right)\right). \tag{15.9}$$

15.3. Конструкция приближенного спектрального проектора. Опишем в общих чертах, следуя С. З. Левендорскому [278], конструкцию п. с. п. для оператора A_t в $L_2(X, H)$, представляющего собой расширение по Фридрихсу псевдодифференциального оператора

$$r_+a_{t,w}e_+\colon C_0^\infty(X, H)\to L_2(X, H),$$

где H — вспомогательное гильбертово пространство, X — область в $\mathbf{R}^n$, e_+ — оператор продолжения нулем с X на $\mathbf{R}^n\setminus X$, r_+ — оператор ограничения с $\mathbf{R}^n$ на X, a_w означает псевдодифференциальный оператор в $\mathbf{R}^n$ с операторным символом Вейля $a(x,\xi)$ (значения a — самосопряженные операторы в H), т. е. оператор, задаваемый формулой

$$a_wu(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a\left(\frac{x+y}{2},\ \xi\right)u(y)\,dy\,d\xi,$$

в которой интегрирование ведется по $\mathbf{R}^n_y \times \mathbf{R}^n_\xi$, $a_w: C_0^\infty(X, H_1) \to C_0^\infty(X, H)$, где H_1 — гильбертово пространство, плотно вложенное в H. Предполагается, что функция a удовлетворяет обычным в теории псевдодифференциальных операторов оценкам, гарантирующим, в частности, корректность определения a_w.

Введем теперь функцию $\chi_t \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, представляющую собой сглаженную характеристическую функцию полуоси $(-\infty, 0)$, а также функцию $\psi_{t,x} \in C_0^\infty(X)$, аппроксимирующую характеристическую функцию области X. При этом предполагается, что при $t \to +\infty$ обе функции χ_t, ψ_t, стремятся к соответствующим характеристическим функциям, однако не слишком быстро в том смысле, что их производные не слишком быстро растут.

Подынтегральная функция в (15.1′) может не быть конечной (такая ситуация встречается, например, при рассмотрении вырождающихся уравнений). Поэтому введем еще такой вспомогательный символ $d_t = d_t(x, \xi)$ (также эрмитовозначный), что $d_t > 0$ и

$$N(0;\ (a_t - d_t)(x, \xi)) < \infty, \quad (x, \xi) \in X \times \mathbf{R}^n.$$

Теперь положим —

$$\overset{0}{e}{}^{\pm}_t = \chi_t\left(d_t^{-\frac{1}{2}} a_t d_t^{-\frac{1}{2}} \mp 1\right), \quad e^{\pm}_t = \psi_{t,x} \overset{0}{e}{}^{\pm}_t \psi_{t,x},$$

и, наконец, возьмем $\mathscr{E}^{\pm}_t = e^{\pm}_{t,w}$.

Для построенных таким образом п. с. п. $\mathscr{E}^{\pm}_t$ надо проверять различные оценки типа условий предложения 15.1. Успех этого предприятия зависит от наличия достаточно хорошей алгебры псевдодифференциальных операторов, в которую можно было бы включить все встречающиеся операторы и в которой имелись бы хорошая теорема о композиции и возможность получать неравенства типа Гординга для операторов с положительными символами. Все это удается сделать при выполнении следующих условий:

1) правая часть формул (15.1′) конечна;

2) символ a_t — гипоэллиптический символ в некоторой алгебре псевдодифференциальных операторов, зависящей, вообще говоря, от t.

Последнее условие обычно означает, что существуют такие весовые скалярные функции $\Phi_t(x, \xi)$, $\varphi_t(x, \xi)$ и операторнозначная функция $q_t(x, \xi)$, что равномерно по t

$$\|(q_t^{-1})^* (\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_t)\, q_t^{-1}\| \leqslant c_{\alpha\beta} \Phi_t^{-|\alpha|} \varphi_t^{-|\beta|}, \quad (x, \xi) \in X \times \mathbf{R}^n, \qquad (15.10)$$

$$a_t(x, \xi) \geqslant c q_t(x, \xi)^* q_t(x, \xi) \text{ при } |x| + |\xi| \geqslant C(t). \qquad (15.11)$$

Весовые функции Φ_t, φ_t, q_t должны удовлетворять некоторым условиям типа условий Билза и Феффермана [182], из которых основное — *усиленный принцип неопределенности*: если $h_t = \Phi_t^{-1}\varphi_t^{-1}$, то

$$h_t(x, \xi) \leqslant C(1+|x|+|\xi|)^{-\varepsilon}, \tag{15.12}$$

где $\varepsilon > 0$, или

$$\sup_{x,\xi} h_t(x, \xi) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{15.12'}$$

В этой ситуации, как правило, можно взять $d_t = q_t^* q_t h_t^\delta$, где $\delta > 0$.

При этих условиях удается доказать асимптотическую формулу (15.1′) с оценкой остаточного члена, в которую входят меры множеств, связанных с границей $\partial X \times \mathbf{R}^n$ и с поверхностями уровней $\lambda_{t,j}(x, \xi) = 0$ собственных значений $\lambda_{j,t}$ символа $a_t(x, \xi)$.

В качестве необходимых алгебр псевдодифференциальных операторов часто бывают удобны алгебры, построенные на основе классов символов Вейля, предложенных Хёрмандером (см. [251], а также [254, § 18.5]). В частности в исчислении Хёрмандера прояснена роль принципа неопределенности.

Отметим, что роль принципа неопределенности в спектральной теории недавно была явно указана Фефферманом [226]. В частности, невыполнение этого принципа в форме (15.12), (15.12′) для скалярного оператора A может привести к нарушению справедливости классической формулы Вейля (15.1) (несмотря на то, что она имеет смысл) и необходимости введения операторного символа.

15.4. Некоторые точные результаты. А. Мы начнем с формулировки результата Хёрмандера [252] об асимптотике обычной функции распределения спектра $N(\lambda)$ для оператора a_w в $\mathbf{R}^n$, задаваемого положительным символом Вейля $a = a(z)$, где $z = (x, \xi)$. В этом примере мы будем использовать терминологию и обозначения из [254, § 18.5] (см. также [251]). Пусть $a \in S(a, g)$, где g — риманова метрика на $\mathrm{R}_z^{2n} = \mathrm{R}_x^n \times \mathrm{R}_\xi^n$, являющаяся σ-умеренной относительно канонической симплектической структуры σ. Полагая $h(z) = [\sup(g_z/g_z^\sigma)]^{1/2}$, предположим, что

$$h(z) \leqslant Ca(z)^{-\gamma}, \quad 1+|z| \leqslant a(z)^N. \tag{15.13}$$

Тогда если $0 < \delta < 2\gamma/3$, то при $\lambda \to +\infty$

$$N(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda + \lambda^{1-\nu}) - V(\lambda - \lambda^{1-\nu})), \tag{15.14}$$

где

$$V(\lambda) = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{(x, \xi) : a(x, \xi) < \lambda\}. \tag{15.15}$$

Более явно остаток в (15.14) можно оценить, сделав дополнительные предположения относительно a. А именно, (см. [162, § 28]), если

$$V'(\lambda)V(\lambda)^{-1} = O(\lambda^{\nu-\varepsilon-1}), \tag{15.16}$$

то

$$V(\lambda+\lambda^{1-\nu})-V(\lambda-\lambda^{1-\nu})=O(\lambda^{-\varepsilon}V(\lambda)).$$

В свою очередь, оценка (15.16) будет выполнена, если потребовать, например, выполнения условия

$$|z\cdot\nabla a(z)|\geqslant ca(z)^{1+\varepsilon-\nu},\quad |z|\geqslant R_0,\quad c>0,\quad z=(x,\xi).\quad (5.17)$$

Тем самым при выполнении условия (15.17) формула (15.14) приобретает более простой вид

$$N(\lambda)=V(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\varepsilon})).\qquad (15.18)$$

Рассмотрим, например, случай когда символ *полиоднороден* по z, т. е. допускает асимптотическое разложение

$$a\sim a_m(z)+a_{m-1}(z)+\ldots,$$

где символ $a_{m-j}(z)$ положительно однороден по z порядка $m-j$ и $a_m(z)>0$ при $z\neq 0$ (о точном смысле такого разложения см., например, [65, § 1] или [162, § 23]). Условие (15.17) и, следовательно, (15.16) для таких символов выполняется при $\varepsilon\leqslant\nu$, поскольку, по формуле Эйлера,

$$z\cdot\nabla a(z)\sim ma_m(z)+(m-1)\,a_{m-1}(z)+\ldots$$

Ясно, что выгодно взять $\varepsilon=\nu$, поскольку это даст наилучшую оценку (15.18). Далее, с метрикой $g=(1+|z|^2)^{-1}dz^2$ все условия будут выполнены, причем $h(z)=(1+|z|^2)^{-1}$ и можно взять $\gamma=2/m$, так что (15.18) получается при любом $\varepsilon<4/(3m)$. Вычисляя $V(\lambda)$, легко показать, что

$$V(\lambda)=(2\pi)^{-n}\lambda^{2n/m}\operatorname{mes}\{z:a_m(z)<1\}-$$
$$-(2\pi)^{-n}\lambda^{(2n-1)/m}\int\limits_{a_m(z)=1}\frac{a_{m-1}(z)}{|\nabla a_m(z)|}\,dS_z+O(\lambda^{(2n-2)/m}),$$

где dS_z — евклидов элемент площади поверхности $\{z:a_m(z)=1\}$. Поэтому асимптотика (15.18) приобретает в нашем случае вид

$$V(\lambda)=c_0\lambda^{2n/m}+c_1\lambda^{(2n-1)/m}+O(\lambda^{(2n-1-\varkappa)/m}),\qquad (15.19)$$

где $\varkappa<1/3$. Исходя из рассмотрения, например, гармонического осциллятора, можно ожидать, что в оптимальной оценке $\varkappa=1$. Этот результат можно получить методом гиперболического уравнения, впервые примененным в этой ситуации Хельфером и Робером [244] (см. также [243]), или исследуя преобразование Фурье меры $dN(\lambda^{1/2m})$ с помощью ядра теплопроводности (Арамаки [174]).

Описанная ситуация является довольно типичной для метода п. с. п. Для весьма общих операторов он дает в спектральных асимптотиках оценку остаточного члена, которая хуже оценки, даваемой методом гиперболического уравнения, имеющим однако более узкую область применимости (метод гиперболического уравнения требует той или иной структуры символов, которая не нужна для метода п. с. п.).

Мы описали ситуацию, когда метод п. с. п. применялся к операторам в $\mathbf{R}^n$ с символами, на которые налагались требования в которых x и ξ равноправны. Это, конечно, не обязательно и легко приспособить метод п. с. п. к несимметричной относительно замены x на ξ ситуации. Например, В. И. Фейгин [151] и С. З. Левендорский [90] рассмотрели методом п. с. п. дифференциальные операторы в области $X \subset \mathbf{R}^n$, у которых коэффициенты могут быстро расти на бесконечности: например, для оператора Шрёдингера $A = -\Delta + q(x)$ условие на потенциал имеет вид $q \in C^1$, $q \geqslant 1$,

$$|\nabla q(x)| \leqslant Cq(x)^{1+\delta_0}, \quad 0 \leqslant \delta_0 < 1; \quad q(x) \to +\infty \tag{15.20}$$

при $|x| \to \infty$ или $x \to \partial X$.

Вообще, пусть эрмитовозначный $N \times N$-матричный символ $a(x, \xi)$ удовлетворяет следующим условиям, которые предполагают задание функции q, для которой выполнено (15.20):

$$\| [\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)]\, a(x, \xi)^{-1} \| \leqslant C_{\alpha\beta} (|\xi| + q(x))^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \tag{15.21}$$

где $\delta_0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$;

$$\| a(x, \xi) \| \leqslant C (|\xi| + q(x))^k;$$

$$\| a(x, \xi)^{-1} \| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| + |\xi| \to \infty \quad \text{или} \quad x \to \partial X.$$

Тогда замыкание оператора a_w в $(L_2(X))^N$ (с области определения $(C_0^\infty(X))^N$) самосопряженно и имеет дискретный спектр, причем если

$$V_\pm(\lambda) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{mes} \{(x, \xi) \in X \times \mathbf{R}^n : 0 < \pm \lambda_j < \lambda\}, \tag{15.22}$$

где $\lambda_j = \lambda_j(x, \xi)$ собственные значения матрицы a, и $W_\pm(t; \tau) = V_\pm(t+\tau) - V_\pm(t-\tau)$, то для функций распределения $N_\pm(\lambda; A)$ справедливы асимптотики

$$N_\pm(\lambda; A) = V_\pm(\lambda) + O(\lambda^{-\varkappa} V_\pm(\lambda) + W_\pm(\lambda, \lambda^{1-\varkappa})), \tag{15.23}$$

где $\varkappa \in (0, (\rho-\delta)/(3k))$ при $N > 1$; $\varkappa \in (0, (\rho-\delta)/(2k))$ при $N = 1$ (т. е. в скалярном случае).

Доказательство этих асимптотик требует построения п. с. п. в виде семейства операторов, задаваемых с помощью амплитуд $a(x, y, \xi)$ равных 0 при $|x-y| \geqslant c(q(x) + q(y))^{-\gamma}$, $\gamma > \delta_0$, $c > 0$ (см. [151]).

Условие (15.20) разрешает не только быстро растущие потенциалы (например, $\exp(\exp(\exp \ldots (\exp |x|^2)) \ldots)$, но и потенциалы, растущие, наоборот, весьма медленно. Например, если $n = 1$, то можно взять $q(x) = \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{k} |x|$ при больших $|x|$ и рассмотреть оператор Шрёдингера $A=-d^2/dx^2+q$ в $L_2(\mathbf{R}^1)$. Формула (15.23) в этом случае неприменима, т. к. $W(\lambda, \lambda^{1-\varkappa})$ растет быстрее, чем $V(\lambda)$, но несколько более общие рассуждения, приведенные в [278, § 2, теорема 1], дают возможность получить асимптотику

$$N(\lambda;\ A)=V(\lambda)[1+O((\underbrace{\exp\ldots\exp}_{k}\lambda)^{-r})],$$

где $r\in(0, 2/3)$ (см. [278, § 5]). Отметим еще, что условия гладкости, содержащиеся в (15.21), в случае оператора Шрёдингера несущественны и могут быть обеспечены применением сглаживания (см. [151]).

Б. Опишем результаты В. И. Фейгина [152] о квазиклассических асимптотиках. Рассмотрим эллиптический самосопряженный h — дифференциальный оператор A_h в $\mathbf{R}^n$, т. е. оператор с малым параметром h вида

$$A_h=\sum_{|\alpha|\leqslant m,\ k\leqslant m_1} a_{\alpha k}(x)h^{|\alpha|+k}D^\alpha. \tag{15.24}$$

Пусть

$$a_0(x,\ h\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_{\alpha 0}(x)h^\alpha\xi^\alpha$$

— функция, играющая роль главного символа оператора A в задаче о *квазиклассических спектральных асимптотиках*, т. е. асимптотиках при $h\to+0$. Предположим, что $a_{\alpha k}\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и при некотором $\rho>0$ для любого мультииндекса γ

$$|\partial_x^\gamma a_{\alpha k}(x)|\leqslant C_{\alpha\gamma k}a_{00}(x)^{\max\left(1-\frac{|\alpha|+k}{m}-\rho(|\gamma|+k),0\right)}, \tag{15.25}$$
$$x\in\mathbf{R}^n,\ |\alpha|\leqslant m,\quad k\leqslant m_1.$$

Кроме того, пусть выполнены условия «эллиптичности»

$$|a_0(x,\ h\xi)|\geqslant c_0(h^{2m}|\xi|^{2m}+a_{00}^2(x))^{1/2},$$

где $c_0>0$, и условие конечности фазового объема

$$\operatorname{mes}\{(x, \xi) : a(x, \xi, h)<2\}<\infty,$$

где $a(x,\xi,h)$ — полный символ Вейля оператора A_h. Отюда можно вывести дискретность спектра оператора A на $(-\infty, 1)$ при малых $h>0$. Тогда оказывается, что при любых $R\leqslant R_0=(\rho+1/m)^{-1}$, $h\leqslant 1$, $H\in\mathbf{R}$, $M\in[M_0, h^{-R}]$, где M_0 достаточно велико, для функции распределения собственных значений оператора A_h имеет место оценка

$$|N(Mh^R;\ A_h)-(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{(x,\ \xi):a_0(x,\ h\xi)<Mh^R\}|\leqslant$$
$$\leqslant C\operatorname{mes}\{(x,\ \xi):|a_0(x,\ h\xi)-Mh^R|\leqslant CM^sh^{R+\Delta}\}+$$
$$+C_H\operatorname{mes}\{(x,\ \xi):a_0(x,\ h\xi)\leqslant Mh^R+CM^sh^{R+\Delta}\}M^{-H}h^{\varepsilon H}, \tag{15.26}$$

где $1-\frac{1}{2}(\rho+1/m)<s<1$, $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-R(\rho+1/m))-\Delta$ и $\Delta>0$ выбрано так, что $\varepsilon>0$ при $R<R_0$ и $\varepsilon=0$ при $R=R_0$. Постоянные C, C_H зависят только от постоянных $C_{\alpha\gamma k}$, c_0 в оценках символов, а также от m и H.

Выбирая параметры M, R, отсюда можно получить разнообразную информацию о собственных числах. Например, при $R=0$ из (15.26) получается асимптотическая формула для $N(\lambda; A_h)$ при $h\to+0$ и при фиксированном λ. В случае же $R=R_0$ формула (15.26) при некоторых дополнительных условиях дает асимптотику типа формулы Бора—Зоммерфельда для индивидуального собственного числа $\lambda_N=\lambda_N(h)$ при $h\to+0$ и при $N\to\infty$ (см. [152]).

Наиболее важным частным случаем оператора (15.24) является оператор Шрёдингера

$$A_h=-h^2\Delta+q(x). \tag{15.27}$$

Асимптотика (15.26) применима к этому случаю при условии, что $q>0$ и q удовлетворяет оценкам (15.25) (с $\alpha=k=0$, $a_{00}=q$). С. З. Левендорский [278] получил асимптотику $N(\lambda; A_h)$ при $h\to+0$ и фиксированном λ при более слабых ограничениях на потенциал q, который может быть эрмитовозначной $p\times p$ матричной функцией, и в области $X\subset\mathbf{R}^n$ (возможно, неограниченной) с липшицевой границей (тогда A_h надо понимать как расширение по Фридрихсу). А именно, пусть

$$q\geqslant cI,\quad \|q^{(\alpha)}(x)q^{-1}(x)\|\leqslant C_\alpha,\quad |\alpha|=1, 2, \ldots$$

Тогда если λ таково, что $q(x)\geqslant\lambda I$ вне некоторого компакта, лежащего в X, то при $h\to+0$

$$N(\lambda;\ A_h)=h^{-n}V(\lambda;\ q;\ X)+O(h^{-n+\varkappa}), \tag{15.28}$$

где

$$V(\lambda;\ q;\ X)=(2\pi)^{-n}v_n\sum_{j=1}^{p}\int_X(\lambda-\lambda_j^0(x))_+^{n/2}\,dx,$$

v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$, $\lambda_j^0(x)$ — собственные значения матрицы $q(x)$, $a_+=\max(a, 0)$, $\varkappa\in(0, 1/3)$. Качество оценки остатка в (15.28) определяется числом $\varkappa$ и оно может быть улучшено в следующих случаях:

а) если q локально гладко диагонализуема, то можно взять $\varkappa\in(0, 1/2)$;

б) если, кроме того, граница ∂X кусочно-гладкая, то можно взять $\varkappa\in(0, 2/3)$.

В. Рассмотрим теперь задачу об асимптотике спектра линейного *операторного пучка*:

$$Au=\lambda Bu \tag{15.29}$$

в ограниченной области $X \subset \mathbf{R}^n$. Пусть A, B — симметрические классические (полиоднородные по ξ) псевдодифференциальные операторы на $\overline{X}$ порядков m_1 и m_2 соответственно, причем $m_1 > m_2$, а оператор A имеет положительный главный символ $a(x, \xi)$ и, более того,

$$(Au, u) \geqslant c \|u\|^2_{(m_1)}, \quad u \in C_0^\infty(X), \tag{15.30}$$

где $\|\cdot\|_{(m_1)}$ — обычная соболевская норма порядка m_1. Пусть $N_\pm(\lambda)$ — функции распределения положительных и отрицательных собственных значений задачи (15.29) с условиями Дирихле в обычной вариационной постановке, так что, в силу вариационного принципа, $N_\pm(\lambda)$ равно числу отрицательных собственных значений для расширения по Фридрихсу оператора $A \mp \lambda B$. Положим ещё

$$(\partial X)_\varepsilon = \{x : \operatorname{dist}(x, \partial X) < \varepsilon\}.$$

Применение метода п. с. п. в этой ситуации дает следующие результаты (С. З. Левендорский [91], [92], [278]):

а) если B эллиптичен и имеет главный символ $b(x, \xi)$, а область X такова, что

$$\operatorname{mes}(\partial X)_\varepsilon \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{15.31}$$

то при $\lambda \to +\infty$

$$N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-r)/m}), \tag{15.32}$$

где $m = m_1 - m_2$, $r \in (0, 1/3)$, а постоянные $c_\pm$ обычным образом выписываются в терминах главных символов a и b. Одна из постоянных $c_\pm$ обращается в 0 в зависимости от знака b.

При некоторых дополнительных ограничениях этот результат обобщается на матричные операторы (и в этом случае обе постоянные $c_\pm$ могут быть отличны от 0).

Если область X имеет липшицеву границу, то в асимптотике (15.32) можно взять $r \in (0, 1/2)$, а для областей с кусочно-гладкой границей даже $r \in (0, 2/3)$.

б) Пусть теперь оператор B не является эллиптическим и число $\varkappa \in [0, 1)$ таково, что

$$\int\limits_{X \times S^{n-1}} |b(x, \xi)|^{-\varkappa} dx dS_\xi < \infty,$$

где $S^{n-1} = \{\xi : |\xi| = 1\}$, dS_ξ — евклидов элемент площади сферы S^{n-1}. Тогда

$$N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^{n/m} + O(\lambda^{\rho(r)}), \tag{15.33}$$

где $\rho(r) = \max\{(n-r)/m, n(1-\varkappa)/(m+r-\varkappa m)\}$, а $r \in (0, 1/3)$ при условии, что X удовлетворяет (15.31). Если граница ∂X липшицева, то, как и выше, можио взять $r \in (0, 1/2)$, а для областей с кусочно гладкой границей даже $r \in (0, 2/3)$. Этот результат также переносится на матричные операторы при некоторых дополнительных ограничениях на символы. Случай общих граничных условий также может быть рассмотрен в рамках этой схемы [278].

Г. Вырождающиеся операторы дают основные примеры того, что «скалярная» вейлевская асимптотика типа (15.1) или (15.14) может потерять смысл или оказаться неверной, но при этом применение операторных символов восстанавливает ее справедливость.

Опишем, следуя С. З. Левендорскому [94], основную идею необходимого построения. Пусть A — формально самосопряженный полуограниченный снизу дифференциальный оператор в области $X \subset \mathbb{R}^n$ и для A задана в X краевая задача, вырождающаяся на многообразии $\Gamma \subset \overline{X}$, причем вырождение определяется функциями типа $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, зависящими только от нормальных к Γ переменных. Тогда в прилегающей к Γ тонкой полоске X'_t оператор A можно во многих случаях реализовать как невырождающийся оператор на Γ с операторнозначным символом $\tilde{a}_t$, а в $X_t = X \setminus \overline{X}'_t$ оператор A невырожден. Пусть $A_{1,t}$, $A_{2,t}$ — операторы краевых задач для A в X_t, X'_t соответственно, причем на $\overline{X}_t \cap \overline{X}'_t$ задаются условия Дирихле, а на $\partial X_t \cap \partial X$ и $\partial X'_t \cap \partial X$ — исходные краевые условия. Если область X'_t не слишком быстро сужается при $t \to +\infty$, то при помощи стандартных вариационных соображений можно получить, что

$$N(t; A) \sim N(t; A_{1,t}) + N(t; A_{2,t}). \tag{15.34}$$

Для $N(t; A_{1,t})$ имеет место классическая вейлевская асимптотика ((15.1) с $A_t = A_{1,t} - tI$), а для $A_{2,t}$ — операторная асимптотика

$$N(t, A_{2,t}) \sim (2\pi)^{n_1 - n} \iint_{T^*\Gamma} N(t; \tilde{a}_t(\tilde{x}, \tilde{\xi}))\, d\tilde{x}\, d\tilde{\xi}, \tag{15.35}$$

где $n_1 = \operatorname{codim} \Gamma$. К сожалению, явное вычисление асимптотики правой части (15.35) может оказаться непростой задачей; эта задача тем проще, чем уже область X'_t, но формулу (15.34) и вейлевскую асимптотику для $N(t; A_{1,t})$ удается доказать лишь в случае не слишком узкой области X'_t. Выбор же области X'_t диктуется возможностью последующего применения метода п. с. п. На этом пути удается рассмотреть очень общее анизотропное вырождение, включающее, в частности, описанные в § 10 случаи слабого, сильного и промежуточного вырождения на границе ∂X (подробнее см. [94]).

Другой пример вырождения — оператор Шрёдингера с неотрицательным однородным по x (порядка $a > 0$) потенциалом (см. пример 10.5), который может обращаться в 0 конечного порядка $a_1 < a$ на n_1-мерном конусе $\hat{K}$, пересечение которого $K = \hat{K} \cap S^{n-1}$ с единичной сферой представляет собой гладкое

((n_1-1)-мерное) многообразие (здесь $n_1<n$). Описанные в § 10 результаты М. З. Соломяка [146] могут быть получены методом п. с. п.; С. З. Левендорский [94] распространил их на случай оператора Шрёдингера с матричным потенциалом.

Опишем обобщение формулы Вейля, указанное С. З. Левендорским [94] и позволяющее предсказывать асимптотику спектра в случаях слабого и промежуточного вырождений, а также ее порядок в случае сильного вырождения.

Пусть $d=d(x)$ — такая функция на X, что $d\geqslant 0$ и

$$d\leqslant c_1A+c_2I, \tag{15.36}$$

где функция d отождествляется с оператором умножения на d. Тогда для любого $c>0$ существуют такие $c', c''>0$, что

$$N(t;\, A+cd)\leqslant N(t;\, A)\leqslant N(c't+c'';\, A+cd).$$

Следовательно, если асимптотика функции $N(t; A+cd)$ при $t\to+\infty$ степенная или логарифмически-степенная, то

$$c'N(t;\, A)\leqslant N(t;\, A+cd)\leqslant c''N(t;\, A),$$

что часто дает возможность получить точные по порядку оценки для $N(t; A)$. Смысл замены A на $A+cd$ состоит в том, что для операторов с дискретным спектром при $\Gamma\subset\partial X$ функцию d можно выбрать так, что $d(x)\to+\infty$ при $x\to\Gamma$. Более того, оказывается, что в случае слабого или промежуточного вырождения при аккуратном выборе d (максимальном по порядку возможного роста вблизи Γ) формула Вейля (15.1) с символом $a_t(x, \xi)=a(x, \xi)+cd(x)-t$ (и с $A_t=A-tI$) правильно предсказывает не только порядок, но и главный член асимптотики.

Приведем пример выбора функции d. Вне фиксированной окрестности многообразия Γ нужно взять $d(x)=1$. Пусть в окрестности U точки $x_0\in\Gamma$ оператор A в некоторых координатах $y=(y', y'')$ имеет вид

$$A=\sum_{\alpha,\beta} D_y^{\beta} a'_{\alpha\beta}(y)\,\rho_\alpha(y'')\,\rho_\beta(y'')\,D_y^{\alpha},$$

где ρ_α — функции, определяющие вырождение (при $y''=0$). Тогда нужно положить

$$d(x)=\max_{\alpha\neq 0}\rho_\alpha(y''(x))^2\,|y''(x)|^{-2|\alpha''|},$$

где $\alpha=(\alpha', \alpha'')$ — разбиение мультииндекса α, соответствующее разбиению $y=(y', y'')$ (см. [94]).

В заключение отметим, что метод п. с. п. позволяет рассмотреть также ряд других задач, не упомянутых в этом параграфе (например, асимптотику спектра задач со связями [93] и задач теории оболочек [92], асимптотику проинтегрированной плотности состояний почти периодических и случайных операторов [11], [30]. За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателя к цитированным выше работам.

§ 16. Оператор Лапласа на однородных пространствах и фундаментальных областях дискретных групп движений

16.1. Вводные замечания. Если на римановом многообразии X действует *группа изометрий* G, то оператор Лапласа—Бельтрами $-\Delta$ коммутирует с действием этой группы. Тем самым в каждом собственном подпространстве оператора $-\Delta$ индуцируется представление группы G. Таким образом, появляется возможность исследовать спектр средствами теории представлений, использующими алгебраическую структуру X. Она наиболее богата в случае, когда X — *однородное пространство*, т. е. факторпространство группы Ли G по замкнутой подгруппе H. Особенно результативен алгебраический подход для компактных многообразий постоянной кривизны, т. е. пространств, которые получаются факторизацией $\mathbf{R}^n$, S^n или $\mathbf{H}^n$ *(пространство Лобачевского)* по дискретной группе движений. Для оператора Лапласа на таких многообразиях часто удается провести полный спектральный анализ; здесь также удается включить в рассмотрение и операторы основных краевых задач на фундаментальных областях. Все это существенно дополняет материал § 4.

Далее, богатая алгебраическая структура часто приводит к важным соотношениям (таким, как формула Пуассона или формула Сельберга), связывающим спектр оператора Лапласа с геометрическими характеристиками многообразия — в первую очередь, с длинами его замкнутых геодезических. В общей ситуации такая связь тоже существует, но оказывается куда более завуалированной (см. § 14).

В обсуждаемом круге вопросов удается получить обширные результаты по проблеме «can one hear the shape of a drum» о возможности восстановления дифференциального оператора по его спектру — мы уделим наибольшее внимание именно этому и смежным вопросам. Мы не коснемся здесь спектральной теории автоморфных функций на плоскости Лобачевского; по ее поводу см. [40].

16.2. Автоморфный оператор Лапласа. Пусть X — риманово пространство, G — дискретная группа изометрий X. *Фундаментальная область* группы G на X — это связное замкнутое множество $\Omega_0 \subset X$, такое, что каждая орбита G пересекается с Ω_0, и, если γ — отличный от единицы элемент группы G и $\Omega = \operatorname{Int} \Omega_0$, то $\Omega \cap \gamma\Omega = \varnothing$. Обычным образом в $L_2(\Omega)$ вводятся операторы $-\Delta_D = -\Delta_{D,\Omega}$ и $-\Delta_N = -\Delta_{N,\Omega}$ задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа—Бельтрами на Ω. Пусть далее фиксирован *характер* χ группы G, т. е. гомоморфизм G в группу $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Рассмотрим пространство $C_\chi^\infty(X)$ гладких функций u на X, для которых $u(\gamma x) = \chi(\gamma) u(x)$, $C_\chi^\infty(\Omega)$ — пространство сужений на Ω функций из $C_\chi^\infty(X)$. Если $\operatorname{mes} \Omega < \infty$, то оператор Лапласа—Бельтрами симметричен на

$C_\chi^\infty(\Omega)$ и существенно самосопряжен; его замыкание называется *автоморфным оператором Лапласа* $-\Delta_\chi=-\Delta_{\chi,\Omega}$; при выборе другой фундаментальной области оператор $-\Delta_{\chi,\Omega}$ переходит в унитарно эквивалентный. В частном случае, когда преобразования $\gamma \in G$ не имеют неподвижных точек, а характер χ — *тривиальный* (т. е. $\chi(\gamma)\equiv 1$), то $-\Delta_\chi$ можно рассматривать как оператор Лапласа на фактормногообразии $M=G/X$. Важен также случай, когда группа G порождена конечным набором G_0 *отражений*, т. е. изометрий γ, $\gamma^2=1$, оставляющих инвариантными точкн подмногообразия X_γ коразмерности 1. Систему образующих G_0 можно подобрать так, что подмногообразия X_γ, $\gamma \in G_0$, ограничивают фундаментальную область Ω_0 группы G. Для такой области Ω_0 автоморфный оператор Лапласа с тривиальным характером χ совпадает с $-\Delta_{N,\Omega}$, а при $\chi(\gamma)=-1$ для $\gamma \in G_0$ — с оператором $-\Delta_{D,\Omega}$. Другие вещественные характеры задают комбинации условий Дирихле и Неймана.

16.3. Оператор Лапласа на плоском торе. Формула Пуассона. В случае нулевой кривизны наиболее просто описывается спектр оператора $-\Delta$ на *плоском торе*, многообразии $M_G=\mathbf{R}^n/G$, где G — группа движений, изоморфная $\mathbf{Z}^n$. Группа G естественно вкладывается в $\mathbf{R}^n$ как *решетка. Сопряженная решетка* (и *сопряженная группа*) $G^\#$ определяется как $\{\alpha \in \mathbf{R}^n : \alpha\cdot\gamma \in \mathbf{Z}$ для всех $\gamma \in G\}$; равенством $M^\#=\mathbf{R}^n/G^\#$ задается двойственный тор. Спектр оператора $-\Delta_M$ состоит из собственных значений $4\pi^2|\alpha|^2$, $\alpha \in G^\#$, с собственными функциями $\varphi_\alpha(x)=\exp(2\pi i\alpha\cdot x)$. Каждое $\alpha \in G^\#$ задает элемент фундаментальной группы $\pi_1(M^\#)$, причем величина $2\pi|\alpha|$ совпадает с длиной замкнутой геодезической на $M^\#$ из соответствующего гомотопического класса.

Для заданного компактного риманова многообразия X условимся обозначать через $\mathscr{L}(X)$ множество длин всевозможных замкнутых геодезических на X. Мы видим, что в случае, когда $X=M=\mathbf{R}^n/G$ — плоский тор, спектр оператора $-\Delta_M$ и множество $\mathscr{L}(M^\#)$ однозначно определяют друг друга. Более того, спектр $-\Delta_M$ однозначно связан и с $\mathscr{L}(M)$. Эта связь дается классической *формулой суммирования Пуассона*, согласно которой для любой функции $f \in S(\mathbf{R}^n)$ и для любой решетки $G\subset\mathbf{R}^n$

$$\sum_{\gamma' \in G^\#} \tilde{f}(\gamma')=\operatorname{vol} M\cdot\sum_{\gamma \in G} f(2\pi\gamma) \tag{16.1}$$

($\tilde{f}$ — преобразование Фурье функции f).

Частным случаем формулы (16.1) является *формула Якоби* для θ-функции $\theta_M(t)=\theta_{(-\Delta_M)}(t)$ оператора $-\Delta_M$ (см. п. 12.4). В соответствии с (16.1),

$$\theta_M(t)=\sum_{\gamma' \in G^\#} e^{-4\pi^2 t|\gamma'|^2}=\frac{\operatorname{vol} M}{(2\pi t)^{n/2}}\sum_{\gamma \in G} e^{-|\gamma|^2/t},$$

или

$$\theta_M(t)=\frac{\operatorname{vol} M}{(2\pi t)^{n/2}}\,\theta_{M^\#}((4\pi^2 t)^{-1}).$$

В классе плоских торов был впервые построен пример изоспектральных, но не изометричных многообразий. Конструкция решеток найдена Виттом в 1941 г. [351], однако лишь в 1964 г. Милнор [294] отметил ее связь со спектральными свойствами плоских торов (поэтому принято говорить о *«примере Милнора»*).

Пусть $G_0=\left\{\gamma\in\mathbf{Z}^n:\sum_j\gamma_j\in 2\mathbf{Z}\right\}$. Рассмотрим решетку $G(n)$ в $\mathbf{R}^n$, порожденную G_0 и элементом $w_n=(1/2,\ldots,1/2)$. Решетка $G(n)$ самосопряжена и $\operatorname{vol} M_{G(n)}=1$. Пусть теперь $G=G(8)\oplus G(8)$, $H=G(16)$ — решетки в $\mathbf{R}^{16}$. Они неизоморфны, т. е. не переводятся друг в друга ортогональным преобразованием пространства $\mathbf{R}^{16}$, поскольку в G имеется базис, состоящий из элементов длины, не большей $\sqrt{2}$, а в H длина любого элемента вида $\gamma+w_{16}$, $\gamma\in G_0$, больше $\sqrt{2}$ поэтому такого базиса нет. Следовательно, торы M_G и M_H неизометричны. С другой стороны, для доказательства изоспектральности достаточно проверить совпадение θ-функций M_G и M_H. Из (16.1) для обеих функций $\Phi(t)=\theta(it/2\pi)$, с учетом самосопряженности решеток, вытекает функциональное уравнение $\Phi(t)=t^{-n/2}\Phi(t^{-1})$. Функция Φ периодична с периодом 1, так как все элементы G, H имеют четный квадрат длины. Таким образом, $\Phi(t)$ — модулярная функция с весом $t^{-n/4}$, а при $n=16$ пространство таких функций одномерно (см. [322]), следовательно, θ-функции решеток G и H могут различаться лишь на постоянный множитель. Наконец, из того, что $\operatorname{Vol} M_G=\operatorname{Vol} M_H$, в силу (16.1), вытекает равенство главных членов асимптотики θ-функций при $t\to 0$, а потому $\theta_G\equiv\theta_H$.

Позже Кнезер [272] построил аналогичный пример в размерности 12 и показал, что при $n=2$ таких примеров быть не может. Далее Волперт [352] установил, что все же в общем положении изоспектральные торы изометричны. Если $G=A\mathbf{Z}^n$, $H=B\mathbf{Z}^n$, где A, B — квадратные матрицы, и торы M_G и M_H изометричны, то элементы матрицы A^*A являются линейными комбинациями элементов B^*B с рациональными коэффициентами, и обе матрицы принадлежат некоторому подмножеству коразмерности 1 в пространстве положительных матриц. Отсюда, в частности, следует, что любое непрерывное семейство изоспектральных торов изометрично. Общее число изоспектральных попарно неизометричных торов конечно в любой размерности [352]. При $n=3$, в частности, их количество не больше 15 [188].

Пусть, далее, G — произвольная дискретная группа изометрий $\mathbf{R}^n$, имеющая компактную фундаментальную область. Любая такая группа содержит изоморфную $\mathbf{Z}^n$ подгруппу G_0 конечного индекса (см. [43]). Таким образом, описание спектра автоморфного оператора Лапласа на M_G, отвечающего характеру, тривиальному на G_0, сводится к отысканию тех λ для которых линейная комбинация функций $\varphi_\alpha(x)$ при $|\alpha|^2=\lambda/4\pi^2$ удовлетворяет условиям автоморфности для $\gamma\in G/G_0$. Такая задача исследовалась до настоящего времени лишь для групп G порожденных отражениями (*аффинных групп Вейля*) — см. [43]: для полиэдральных областей специального вида (*камер Вейля*) дано описание спектра задач Дирихле и Неймана в терминах решений некоторых связанных с G диофантовых уравнений.

16.4. Случай пространств постоянной отрицательной кривизны. Обратимся сначала к двумерному случаю. Группа $PGL(2, \mathbf{R})$ матриц с единичным определителем изометрий пространства $\mathbf{H}^2$ (дробно-линейных преобразований), в отличие от группы изометрий $\mathbf{R}^n$, имеет чрезвычайно богатое множество дискретных подгрупп. Мы ограничимся здесь подгруппами $G\subset PGL(2, \mathbf{R})$, имеющими компактную фундаментальную область (*фуксовы группы первого рода*); такие подгруппы характеризуются тем, что все их элементы (кроме, конечно, единичного) *гиперболичны*, т. е. являются матрицами со следом, бо́льшим 2. Гиперболические преобразования не имеют конечных неподвижных точек, так что мы рассмотрим компактные многообразия без края $M=M_G=G\setminus\mathbf{H}^2$.

Основой спектральной теории рассматриваемых многообразий является *формула следов Сельберга* (см. [40]), которую можно трактовать как далекое обобщение формулы Якоби с плоских торов — римановых поверхностей рода 1 — на римановы поверхности рода $g\geqslant 2$. Формула Сельберга дает явное выражение следа произвольной достаточно быстро убывающей функции от оператора Δ_M (в частности, $\theta_M(t)=\mathrm{Tr}\exp(t\Delta_M)$, $t>0$) через длины замкнутых геодезических на M.

Элемент γ группы G называется *примитивным*, если он не представи́м в виде $\gamma=(\gamma')^k$, $k>1$. Любой непримитивный элемент можно представить в виде положительной целой степени некоторого примитивного. Каждому элементу $\gamma\in G$, $\gamma\neq 1$, отвечает семейство замкнутых геодезических на M одинаковой длины $l(\gamma)$. Для функции $\theta(t)$ формула Сельберга принимает вид

$$\theta(t)=\mathrm{vol}\, M\,\frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}}\int\limits_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau/4t}}{\mathrm{sh}(\tau/2)}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\gamma}\frac{l(\gamma)}{\mathrm{sh}(l(\gamma^k)/2)}\,\frac{e^{-t/4-(l(\gamma^k))^2/4t}}{4\pi t^{1/2}},\qquad (16.2)$$

где суммирование по γ распространяется на все примитивные элементы $\gamma \in G$.

Из (16.2) следует, в частности, что спектр $-\Delta_M$ и спектр длин геодезических однозначно определяют друг друга. В свою очередь, длины геодезических явно выражаются через матрицы преобразованнй: $l(\gamma)=2\mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{tr}\,\gamma/2)$. Эти соображения позволили И. М. Гельфанду [233] установить, что в рассматриваемом классе существует не более, чем счетное число неизометричных многообразий с заданным спектром. Согласно [258], таких многообразий даже конечное число, а в [192] получена оценка, согласно которой количество изоспектральных, но попарно неизометричных поверхностей рода g не превосходит $\exp(507g^3)$.

С другой стороны, в [348] построены примеры неизометричных изоспектральных поверхностей. Впрочем, с точки зрения общего положения, такие примеры нетипичны. Согласно [353], в пространстве Тейхмюллера классов конформно эквивалентных метрик вне некоторого аналитического подмногообразия спектр определяет метрику с точностью до конформной эквивалентности.

В многомерной ситуации неизвестен аналог формулы Сельберга, а следовательно, отсутствует алгебраическое описание спектра. Здесь, однако, построены еще более красноречивые примеры: в размерностях $n \geqslant 3$ существуют изоспектральные многообразия, которые не диффеоморфны [348].

По поводу других аспектов спектральной теории на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, в частности, в связи с краевыми задачами, а также на некомпактных фундаментальных областях, см. в [186], [187], [284] и, в особенности, [40].

16.5. Случай пространств постоянной положительной кривизны. В этом случае имеется наиболее полное описание спектра. Это связано с простотой классификации дискретных групп изометрий, а также большим количеством дополняющих друг друга аналитических и алгебраических структур на S^n.

Для самой сферы S^n собственные значения вычислены в примере 4.7.

Пусть теперь G — группа изометрий S^n, не имеющих (кроме $\gamma=1$) неподвижных точек, $M=G\backslash S^n$. При четном n единственная нетривиальная группа состоит лишь из тождественного и антиподального отображений, которой соответствует $M=\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим случай нечетного $n=2m-1$, $m>1$. Если φ — собственная функция оператора Лапласа на S^n, то функция $(P\varphi)(x)=(\mathrm{card}\,G)^{-1}\sum_{\gamma \in G}\varphi(\gamma x)$ инвариантна относительно действия группы G и потому может рассматриваться как собственная функция на M. Таким образом, спектр оператора Лапласа на M является подмножеством спектра на S^n и задача сводится к определению кратностей d_k собственных чисел $k(n+k+1)$. Удобным аппаратом их описания служит производящая функция кратностей — так называемый *ряд Пуанкаре*

$$F_G(z)=\sum_k z^k d_k. \tag{16.3}$$

Для рассматриваемых групп движений S^n имеет место тождество см. [255])

$$F_G(z)=(\operatorname{card} G)^{-1}\sum_{g\in G}{}' \frac{1-z^2}{\det(1-gz)}, \quad |z|<1, \tag{16.4}$$

где g рассматривается как элемент группы $O(n+1)$. Этим дано описание спектра $-\Delta_M$ в терминах группы G. Обратно, пусть известен спектр $-\Delta_M$. Тогда, согласно (16.4), по ряду Пуанкаре (16.3) можно найти объединение $\sigma(G)$ спектров матриц $g\in G$. По множеству $\sigma(G)$ сами спектры матриц g можно определить лишь конечным числом способов. В итоге получается, что задача определения по спектру $-\Delta_M$ группы G (с точностью до сопряжения с некоторым элементом $O(n+1)$) и самого многообразия M может иметь лишь конечное число решений. Известно, что такое решение единственно в размерности 3, а для линзовых пространств — и в размерности 5 [256]. В то же время в размерности 7 построены примеры линзовых пространств, изоспектральных, но даже не гомеоморфных [257]. Напомним, что *линзовое пространство* $\Lambda(q;\ q_1, \ldots, q_m)$ отвечает циклической группе $G=\mathbf{Z}_q$, образующей которой служит преобразование, являющееся прямой суммой поворотов m двумерных плоскостей на углы $2\pi q_j/q$.

Для другого класса групп изометрий S^n — групп G, порожденных отражениями, рассмотрение ряда Пуанкаре позволяет исследовать спектр краевых задач Дирихле и Неймана на фундаментальных областях. Пусть группа G порождена отражениями относительно системы R гиперповерхностей в $\mathbf{R}^{n+1}$, проходящих через центр S^n. *Камерой Вейля* $C=C(R)$ называется связная компонента дополнения к плоскостям из R; примем в качестве фундаментальной области $M=\bar{C}\cap S^n$.

Неприводимые группы, порожденные отражениями, допускают полную классификацию. Если рассмотреть для каждой плоскости H_i — стенки $C(R)$ — единичный вектор e_i, ортогональный H_i, и направленный в то же полупространство, в котором содержится C, то система векторов e_i обладает тем свойством, что $e_i\cdot e_k=-\cos(\pi/m_{ik})$, где m_{ik} — целое число. Граф Γ, состоящий из вершин по числу граней C, такой, что вершины i, k соединены $m_{ik}-2$ раз, называется *графом Кокстера*. Всевозможные графы Кокстера неприводимых групп перечислены;

они образуют список A_l, $l\geqslant 1$, B_l, $l\geqslant 2$, D_l, $l\geqslant 4$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4 и $I(p)$, $p=5$ или $p\geqslant 7$ (см. [43]).

Если группа G — приводима, то ее граф Кокстера распадается на связные компоненты соответственно разложению G на неприводимые слагаемые. Итак, фундаментальные области Ω, Ω' групп G, G' на S^n изометричны в том и только том случае, когда соответствующие графы Кокстера изоморфны. Пусть $\mathscr{H}_k$ — пространство однородных гармонических полиномов в $\mathbf{R}^{n+1}$ степени k, $\mathscr{H}_k^N$ — подпространство G-инвариантных полиномов, $h_k^N=\dim\mathscr{H}_k^N$. Число h_k^N равняется кратности собственного числа $\lambda_k=k(n+k+1)$ оператора задачи Неймана $-\Delta_{N,\Omega}$. Ряд Пуанкаре $F_G^N(z)=\sum\limits_k h_k^N z^k$ допускает явное представление через числовые характеристики группы G следующим образом. Упорядочим как-либо стенки камеры C и рассмотрим преобразование T, состоящее из последовательных отражений относительно всех стенок C. Собственные числа T не зависят от порядка отражений, имеют вид $\exp(2\pi i m_j/m)$, где m — целое число (*число Кокстера*), а целые числа m_j называются *показателями* группы G.

Теорема 16.1 ([181], [347]). Имеет место тождество

$$F_G^N(z)=(1-z^2)\prod_j(1-z^{m_j+1})^{-1},$$

где множество $\{m_j\}$ состоит из всех показателей группы G. Таким образом, фундаментальные области Ω, Ω' изоспектральны для задачи N в том и только том случае, когда у соответствующих групп G, G' совпадают наборы показателей.

Аналогичный результат верен и для задачи Дирихле в Ω. Собственные функции этой задачи — это *антиинвариантные*, т. е. удовлетворяющие равенству $\varphi(\gamma x)=\det\gamma\varphi(x)$ для любого $\gamma\in G$, собственные функции оператора Лапласа на S^n. Соответствующий ряд Пуанкаре $F_G{}^D(z)$ равен

$$F_G^D(z)=z^{n+1}F_G^N(z)=(1-z^2)\,z^{n+1}\prod_j(1-z^{m_j+1})^{-1}.$$

Итак, для того, чтобы построить примеры изоспектральных, но не изометричных областей на S^n, достаточно сконструировать группы G, G', имеющие различные графы Кокстера, т. е. различные наборы чисел m_{ij}, но одинаковые наборы показателей m_j. Такие примеры были при $n=3$ построены в [347]. В частности, в качестве G можно взять группу $A_3\times A_1$ в $\mathbf{R}^4$, камерой Вейля которой служит конус в $\mathbf{R}^4$, натянутый на векторы e_3, $e_1-e_2+e_3$, $e_1+e_2+e_3$ и e_4, а в качестве G' — группу $I_2(3)+I_2(4)$, для которой камера Вейля — произведение двух углов в $\mathbf{R}^2$ с раствором, соответственно, $\pi/3$ и $\pi/4$.

Пересечение описанных углов с S^3 дает неизометричные области на S^3 для которых как задачи Дирихле, так и задачи Неймана изоспектральны. Пересечение этих углов в $\mathbf{R}^4$ с шаровым слоем $|x| \in (\alpha, \beta)$ дает неизометричные области в $\mathbf{R}^4$, для которых задачи Дирихле и задачи Неймана изоспектральны. Тем самым построены наиболее совершенные к настоящему моменту контрпримеры к проблеме «can one hear the shape of a drum». Тем не менее эти примеры обладают тем дефектом, что границы построенных областей в $\mathbf{R}^4$ — лишь кусочно-гладкие. Для первоначальной постановки проблемы, для области в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей, контрпримеры пока не найдены.

16.6. Изоспектральные семейства нильмногообразий. Во всех указанных выше примерах построенные изоспектральные, но не изометричные многообразия оказываются все же спектрально изолированными. Мы приведем, в заключение, конструкцию Гордон и Уилсона [237], позволившую строить непрерывные семейства неизометричных изоспектральных многообразий.

Эти многообразия являются обобщением плоских торов из п. 16.3. Пусть G — связная односвязная *нильпотентная* группа Ли, для которой экспоненциальное отображение $\exp: g \to G$ является эпиморфизмом алгебры Ли g на G. Пусть Γ — дискретная подгруппа в G, допускающая компактное факторкмногообразие $X = \Gamma \backslash G$ — *нильмногообразие*, снабженное левоинвариантной рмановой метрикой, унаследованной из G.

Каждому автоморфизму $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$ отвечает многообразие $X_\Phi = \Gamma_\Phi \backslash G$, $\Gamma_\Phi = \Phi(\Gamma)$. Можно дать полное описание автоморфизмоз Φ, для которых многообразия X и X_Φ изометричны Согласно [237] все они, с точностью до изометрий G и автоморфизмов, оставляющих инвариантной подгруппу Γ, исчерпываются внутренними автоморфизмами $\Phi \in \mathrm{Inn}(G)$ вида $\Phi_y(x) = y^{-1}xy$, $y \in G$.

Рассмотрим далее класс $AIA(G)$ *почти внутренних автоморфизмов*: $\Phi \in AIA(G)$, если для любого $x \in G$ найдется $\Psi \in \mathrm{Inn}(G)$ так, что $\Phi(x) = \Psi(x)$. Множество $AIA(G)$ является группой Ли, замкнутой как подмножество в $\mathrm{Aut}(G)$.

Построенные в [237] примеры показывают, что $AIA(G)$ может быть значительно богаче $\mathrm{Inn}(G)$. Для рассмотрения этих конструкций удобнее перейти к алгебрам Ли. Алгеброй Ли для $\mathrm{Inn}(G)$ служит алгебра $\mathrm{ad}(g) = g/z$ внутренних дифференцирований g (z — центр g), алгеброй Ли для $AIA(G)$ служит алгебра $AID(g)$ *почти внутренних дифференцирований* g, т. е. таких дифференцирований φ что для любого $P \in g$ элемент $\varphi(P)$ попадает в орбиту P под действием $\mathrm{ad}(g)$.

Пример 16.1. Зададим нильпотентную алгебру Ли g образующими $\{P_i, Q_i, R_i : i=1, 2\}$ и соотношениями $[P_1, Q_1] = [P_2, Q_2] = R_1$, $[P_1, Q_2] = R_2$ (все остальные образующие коммутируют). Поскольку $\dim z = 2$, $\dim \mathrm{ad}(g) = 4$. В то же время

$AID(g)$ содержит, кроме $\mathrm{ad}(g)$, также отображения φ_1 и φ_2: $\varphi_1(P_1)=\varphi_2(P_2)=R_2$, т. е.

$$\dim(AIA(G)/\mathrm{Inn}(G))=\dim(AID(g)/\mathrm{ad}(g))=2.$$

Значение введенного класса $AIA(G)$ — в следующем свойстве, доказываемом с помощью метода орбит.

Лемма 16.1. Для $\Phi\in AIA(G)$ операторы Лапласа на p-формах на X и X_Φ изоспектральны.

Детальный анализ классов изометрий нильмногообразий, проведенный в [237], позволяет дать явное описание множества E классов изометрий изоспектральных многообразий.

Теорема 16.2. Пусть $\dim(AIA(G)/\mathrm{Inn}(G))=d>0$. Тогда множество E имеет структуру d-мерного многообразия.

В примере 16.1 $d=2$, и тем самым мы получаем двумерное непрерывное семейство изоспектральных неизометричных деформаций исходного многообразия X.

§ 17. Операторы с периодическими коэффициентами

17.1. Блоховские функции и зонная структура спектра операторов с периодическими коэффициентами. Операторы с периодическими коэффициентами возникают при описании различного рода периодических структур. Наиболее естественным образом это происходит в квантовой теории твердых тел, например, металлов (см. [354]). А именно, ионы металла, образующие кристаллическую решетку, создают периодическое поле и мы можем рассмотреть свободный электрон в этом поле. При этом в ряде случаев, вводя компенсирующие добавки к потенциалу иона, можно пренебречь взаимодействием электронов между собой. Тогда в соответствии с основными принципами квантовой механики возможные значения энергии свободного электрона суть точки спектра оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом, а собственные функции этого оператора суть волновые функции, задающие комплексную амплитуду, характеризующую распределение координат электрона (квадрат модуля этой амплитуды интерпретируется как плотность вероятности нахождения электрона в рассматриваемой точке).

Периодичность n-мерной структуры характеризуется *решеткой* в $\mathbf{R}^n$, т. е. дискретной подгруппой $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$, имеющей вид

$$\Gamma=\{z_1e_1+\ldots+z_ne_n,\quad z_j\in\mathbf{Z}\},$$

где векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют некоторый фиксированный базис в $\mathbf{R}^n$. Функция $a:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ называется Γ-*периодической* или *периодической с решеткой периодов* Γ, если $a(x+\gamma)=a(x)$ для любого $\gamma\in\Gamma$. Ясно, что в этом случае $a(x)$ можно рассматривать как функцию на факторгруппе $\mathbf{R}^n/\Gamma$, представляющей собой n-мерный тор. Экспонента $e_\xi(x)=e^{i\xi\cdot x}$ является Γ-периодической (по x) тогда и только тогда, когда $\xi\cdot\gamma\in2\pi\mathbf{Z}$ для любого $\gamma\in\Gamma$. Точки ξ, удовлетворяющие этому условию, также образуют решетку Γ', называемую *дуальной* (или *двойственной*) *решеткой* к решетке Γ (в физической литературе Γ' часто называют *обратной решеткой*) и состоящую из всех точек вида

$$\{z_1e_1'+\ldots+z_ne_n',\ z_j\in\mathbf{Z}\},$$

где $\{e_1',\ldots,e_n'\}$ — базис, дуальный к базису $\{e_1,\ldots,e_n\}$: $e_j'\cdot e_k=2\pi\delta_{jk}$ (это определение множителем 2π отличается от определения из п. 16.3). Например, если $\Gamma=2\pi\mathbf{Z}^n$ — обычно используемая стандартная решетка, то $\Gamma'=\mathbf{Z}^n$.

Дифференциальный оператор

$$A=a(x,\ D_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D_x^\alpha \tag{17.1}$$

называется Γ-*периодическим*, если все его коэффициенты a_α суть Γ-периодические функции на $\mathbf{R}^n$. Вводя операторы сдвигов (трансляций) по формуле $T_\gamma f(x)=f(x+\gamma)$, легко проверить, что Γ-периодичность оператора A равносильна его перестановочности со всеми операторами $\{T_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$. В терминах символа

$$a(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

Γ-периодичность оператора A означает, что функция $a(x,\ \xi)$ является Γ-периодической по x при каждом фиксированном ξ. Это определение очевидным образом обращается на псевдодифференциальные операторы. Важным примером Γ-периодического оператора в $\mathbf{R}^n$ является оператор Шрёдингера $A=-\Delta+q$ с Γ-периодическим потенциалом $q=q(x)$.

Часто вместо операторов в $\mathbf{R}^n$ рассматривают *разностные операторы*, т. е. операторы на решетке, в качестве которой мы будем всегда для простоты брать $\mathbf{Z}^n$. Если дана подрешетка $\Gamma\subset\mathbf{Z}^n$, то оператор A в $l^2(\mathbf{Z}^n)$ называется Γ-периодическим, если он перестановочен со всеми операторами сдвига T_γ, $\gamma\in\Gamma$, определяемыми в $l^2(\mathbf{Z}^n)$ так же, как в непрерывном случае. Здесь важным примером является *разностный оператор Шрёдингера* $A=-\Delta+q$, где Δ — *разностный оператор Лапласа* на решетке $\mathbf{Z}^n$:

$$\Delta u(x)=\sum_{y:|y-x|=1}(u(y)-u(x)),$$

а q — Γ-периодическая функция на $\mathbf{Z}^n$.

Сдвиги T_γ при $\gamma\in\Gamma$ переводят в себя пространство решений уравнения $Au=\lambda u$. Поэтому естественно ожидать, что при построении разложений по собственным функциям Γ-периодического оператора A можно ограничиться функциями, являющимися собственными и для всех этих сдвигов. Такие функции называются *блоховскими функциями*. По определению, блоховские функции — это функции $\psi=\psi(x)$, удовлетворяющие условию

$$\psi(x+\gamma)=\chi(\gamma)\psi(x)$$

тождественно по x и при всех $\gamma\in\Gamma$. Если $\psi\neq 0$, то ясно, что $\chi(\gamma)\neq 0$ при всех γ; легко также проверить, что $\chi(0)=1$ и $\chi(\gamma_1+\gamma_2)=\chi(\gamma_1)\chi(\gamma_2)$, т. е. χ есть гомоморфизм группы Γ в мультипликативную группу $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Легко видеть, что если $|\chi(\gamma)|\neq 1$ при каком-нибудь $\gamma\in\Gamma$, то $\psi(x)$ имеет экспоненциальный рост по одному из направлений $\pm\gamma$ вдоль последовательности точек $\{x+n\gamma,\ n\in\mathbf{Z}\}$, где x такова, что $\psi(x)\neq 0$. Поэтому если ψ имеет рост не выше степенного или, более общо, если ψ задает обобщенную функцию умеренного роста (а таких обобщенных функций ψ достаточно для построения разложений по собственным функциям любых самосопряженных операторов), то с необходимостью $|\chi(\gamma)|=1$, и мы можем написать

$$\chi(\gamma)=e^{ip\cdot\gamma},\quad \gamma\in\Gamma,$$

где вектор $p\in\mathbf{R}^n$ (не зависящий от γ) называется *квазиимпульсом*. Легко видеть, что в этом случае тождественно по x

$$\psi(x)=e^{ip\cdot x}\varphi(x), \tag{17.2}$$

где функция (или обобщенная функция) $\varphi(x)$ является Γ-периодической. Квазиимпульс p не определяется данной блоховской функцией ψ однозначно: к нему можно добавить любой вектор $\gamma'\in\Gamma'$, где Γ' — дуальная решетка. Поэтому можно считать, что $p\in B$, где B — фундаментальная область действия Γ' на $\mathbf{R}^n$ сдвигами, т. е. B — любое (измеримое) множество, содержащее по одному представителю каждого смежного класса группы $\mathbf{R}^n$ по подгруппе Γ'. Такое множество B называют *элементарной ячейкой решетки* Γ' или *зоной Бриллюэна* соответствующей решетке Γ[1].

Примером зоны Бриллюэна является параллелепипед

$$B=\{\xi_1e'_1+\ldots+\xi_ne'_n,\ 0<\xi_j<1,\ j=1,\ldots,n\},$$

где $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ — базис дуальной решетки Γ'. Для простоты и для определенности в дальнейшем мы всегда будем предполагать зону Бриллюэна выбранной именно таким образом, хотя большинство построений от этого не зависит.

Пространство всех Γ-периодических функций изоморфно пространству всех блоховских функций с фиксированным квазиимпульсом p: изоморфизм дается оператором I_p умножения на $e_p(x)=e^{ip\cdot x}$. Отметим, что в дискретном случае все эти пространства конечномерны (размерность каждого из них равна числу точек в факторгруппе $\mathbf{Z}^n/\Gamma$ или, что то же самое, числу точек фундаментальной области группы Γ).

[1] В физической литературе зоной Бриллюэна называют некоторую специальную элементарную ячейку дуальной решетки.

В непрерывном случае, применяя оператор $A=a(x, D_x)$ вида (17.1) к функции вида (17.2), получаем

$$a(x, D_x)[e^{ip\cdot x}\varphi(x)]=e^{ip\cdot x}a(x, p+D_x)\varphi(x) \qquad (17.3)$$

(эту формулу часто называют *формулой сдвига*), где $a(x, p+D_x)$ означает оператор A_p с символом $a_p(x, \xi)=a(x, p+\xi)$. Итак

$$A_p=I_{-p}AI_p \qquad (17.4)$$

Тем самым, оператор $A=a(x, D_x)$ на пространстве достаточно гладких блоховских функций с квазиимпульсом p подобен оператору $A_p=a(x, p+D_x)$, действующему на пространстве (также достаточно гладких) Г-периодических функций.

Отметим, что если A есть оператор Шрёдингера, т. е. $A=-\Delta+q$, где q — оператор умножения на Г-периодическую функцию $q(x)$, то $A_p=-\Delta+2p\cdot D_x+p^2+q$.

Обозначим теперь через $\mathcal{H}_p$ пространство всех блоховских функций с квазиимпульсом p, принадлежащих $L_{2,\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Ясно, что $\mathcal{H}_p$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f, g)_{\mathcal{H}_p}=\frac{1}{\operatorname{mes} E}\int_E f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

где dx — обычная мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, E — любая элементарная ячейка решетки Г, $\operatorname{mes} E$ — её мера Лебега. Оператор I_p задает изометрический изоморфизм $I_p:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_p$. Отметим, что $\mathcal{H}_0$ — пространство Г-периодических функций из $L_{2,\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Множитель $1/\operatorname{mes} E$ вводится для того, чтобы экспоненты $\{e^{i(p+\gamma')\cdot x}, \gamma'\in\Gamma'\}$ имели норму 1; тем самым, эти экспоненты образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_p$. Теперь легко проверить, что имеет место естественное разложение в прямой интеграл

$$L_2(\mathbf{R}^n)=\oplus\int_B \mathcal{H}_p\,dp, \qquad (17.5)$$

где dp — обычная мера Лебега на зоне Бриллюэна B. Это означает, что имеется взаимно однозначное, линейное и изометричное соответствие между элементами $u\in L_2(\mathbf{R}^n)$ и такими измеримыми вектор-функциями $p\mapsto s(p)$ [1], сопоставляющими каждой точке $p\in B$ вектор $s(p)\in\mathcal{H}_p$, что

$$\int_B \|s(p)\|^2\,dp<\infty,$$

[1] Измеримость здесь можно понимать, например, как измеримость вектор-функции $p\mapsto I_p^{-1}s(p)$ на B со значениями в $\mathcal{H}_0$; эта измеримость в свою очередь означает измеримость любой скалярной функции $p\to(I_p^{-1}s(p), \varphi)$, где φ — любой фиксированный элемент пространства $\mathcal{H}_0$.

(и здесь интеграл по определению равен квадрату нормы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=\oplus\int\limits_{B}\mathscr{H}_p dp$, элементами которого и являются описанные выше вектор-функции). Разложение (17.5) получается, если разложить любую функцию $f\in L_2(\mathbf{R}^n)$ в интеграл Фурье по всем экспонентам $\{e^{i\xi\cdot x},\ \xi\in\mathbf{R}^n\}$, а затем сгруппировать экспоненты, входящие в один смежный класс $\mathbf{R}^n$ по подгруппе Г (эти классы находятся во взаимнооднозначном соответствии с точками зоны Бриллюэна B). Это означает, что $f=\int f_p dp$, где блоховская функция f_p задается формулой

$$f_p(x)=(2\pi)^{-n}\sum_{\gamma'\in\Gamma'}e^{i(p+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(p+\gamma'),$$

в которой $\tilde{f}$ — преобразование Фурье функции f. Отсюда простыми преобразованиями легко получить более явную формулу

$$f_p(x)=(\mathrm{mes}\,B)^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}e^{-ip\cdot\gamma}f(x+\gamma).$$

Изометричность построенного разложения легко следует из равенства Парсеваля для преобразования Фурье.

Пусть теперь дифференциальный оператор A формально самосопряжен и эллиптичен. Тогда в разложении (17.5) он также разлагается в прямой интеграл самосопряженных операторов $A|\mathscr{H}_p$, которые могут быть построены, например, как замыкания операторов, полученных ограничением A на множество всех гладких блоховских функций с квазиимпульсом p. Как следует из (17.4), такой оператор унитарно эквивалентен оператору A_p на торе $\mathbf{R}^n/\Gamma$, и значит, имеет дискретный спектр. Таким образом, мы получаем для исходного оператора A полное разложение по блоховским собственным функциям, принадлежащее И. М. Гельфанду [48] (см. также [223], [312, т.4]). Предполагая для определенности что главный символ оператора A положителен (при $\xi\neq0$), мы можем расположить собственные значения оператора $A|\mathscr{H}_p$ (или A_p) с учетом их кратности в монотонную неубывающую последовательность.

$$E_1(p)\leqslant E_2(p)\leqslant\ldots\leqslant E_l(p)\leqslant\ldots,\tag{17.6}$$

причем $E_l(p)\to+\infty$ при $l\to+\infty$. Элементарные соображения теории возмущений (см. § 8) показывают, что поскольку в операторе A_p от p зависят лишь младшие члены (и притом полиномиальным образом), все функции $E_j=E_j(p)$ являются непрерывными Γ'-периодическими функциями от p или функциями на торе $\mathbf{R}^n/\Gamma'$. При этом некратные собственные значения даже аналитичны по p, а кратные могут локально быть представлены в виде набора ветвей многозначной аналитической функции от p, если не требовать упорядочения по возрастанию, а ввести нумерацию подходящим образом. Точнее, в пространстве переменных (p, E) объединение всех графиков функций E_j локально в окрестности данной точки (p_0, E_0) имеет вид множества нулей многочлена $E^k+a_1(p)E^{k-1}+\ldots+a_k(p)=0$, где $a_1, \ldots, a_k$ — голоморфные функции от p, а k — кратность собственного значения E_0 у оператора $A(p_0)$. Функции $E_j(p)$ или подходящие аналитические функции от p, задающие то же множество собственных значений (16.6), но, быть может, в другой нумерации, обычно называют *энергетическими полосами* (band functions), *блоховским спектром* (Bloch spectrum) или *спектром Флоке* (Floquet spectrum).

Спектр $\sigma(A)$ оператора A, ввиду наличия описанного выше разложения оператора A в прямой интеграл, совпадает с объединением спектров всех операторов A_p, $p\in B$, т. е. с объединением множеств значений всех функций E_j (это объединение замкнуто, поскольку функции E_j непрерывны и $E_j(p)\to+\infty$ при $j\to\infty$ равномерно по p). Но множество значений непрерывной функции $E_j: \mathbf{R}^n/\Gamma'\to\mathbf{R}^n$, ввиду связности тора $\mathbf{R}^n/\Gamma'$, представляет собой отрезок $[a_j, b_j]$, где $a_j=\min E_j(p)$, $b_j=\max E_j(p)$; тем самым

$$\sigma(A)=[a_1, b_1]\cup[a_2, b_2]\cup[a_3, b_3]\cup\ldots, \tag{17.7}$$

причем $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots$, $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant\ldots$, и $a_j\to+\infty$ при $j\to+\infty$. Отрезки $[a_j, b_j]$, вообще говоря, могут перекрываться, касаться друг друга концами, содержаться друг в друге (имея один общий конец) или полностью совпадать. Из (17.7) и предельного соотношения $\lim\limits_{j\to\infty} a_j=+\infty$ вытекает, что мы можем также представить $\sigma(A)$ в одном из двух видов:

$$1)\ \sigma(A)=[c_1, d_1]\cup[c_2, d_2]\cup\ldots\cup[c_l, d_l]\cup[c_{l+1}, +\infty), \tag{17.8}$$

где отрезки $[c_j, d_j]$ и луч $[c_{l+1}, +\infty)$ попарно не пересекаются (т. е. $c_1<d_1<c_2<d_2<c_3<\ldots<c_l<d_l<c_{l+1}$);

$$2)\ \sigma(A)=\bigcup_{l=1}^{\infty}[c_l, d_l],$$

где все отрезки $[c_l, d_l]$ попарно не пересекаются (т. е. в (17.8) $c_1<d_1<c_2<d_2<c_3<d_3<\ldots$), причем $c_l\to+\infty$ при $l\to+\infty$. Здесь в обоих случаях все числа c_j, d_j однозначно определены множеством $\sigma(A)$. Отрезки $[c_j, d_j]$ (и полуинтервал $[c_{l+1}, +\infty)$ в первом случае) называются *разрешенными зонами*, т. к. в в квантовомеханической интерпретации значения энергии частицы, описываемой квантовым гамильтонианом A, могут лежать лишь в этих зонах. По этой же причине свободные от спектра интервалы $(-\infty, c_1)$, (d_1, c_2), (d_2, c_3), ... называются *запрещенными зонами* (конечные запрещенные зоны, т. е. все, кроме $(-\infty, c_1)$, называют также *лакунами*). М. М. Скриганов [143] и О. А. Велиев [39] доказали, что если A — оператор Шрёдингера и $n \geqslant 2$, то реализуется именно первый случай, т. е. спектр заполняет полуось и имеется лишь конечное число запрещенных зон. В одномерном случае такая ситуация является исключением, а не правилом. А именно, при $n=1$, т. е. для одномерного оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом, называемого также *оператором Хилла*, даже отрезки $[a_j, b_j]$ в (17.7) не могут перекрываться (они могут лишь иметь общие концы) ввиду того, что кратность любого собственного значения не превосходит 2. Потенциалы $q(x)$ операторов $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, для которых имеет место первый случай (17.8), называются *конечнозонными* и могут быть явно описаны: они выражаются через θ-функции (см., например, книгу [67]. В этой же книге можно найти описание важной связи конечнозонных потенциалов с некоторыми нелинейными дифференциальными уравнениями — уравнением Кортевега—де Фриза и его высшими аналогами).

В частности, они заведомо являются аналитическими функциями. Потенциалы $q(x)$ с фиксированным числом зон зависят от конечного числа параметров (например, если имеется лишь одна запрещенная зона $(-\infty, c_1)$, то $q=\text{const}$), так что конечнозонные потенциалы в очевидном смысле редки, хотя ими можно аппроксимировать любой гладкий потенциал (В. А. Марченко [108]). М. М. Скриганов [143] изучал также рост при $j \to \infty$ кратности перекрытия зон $[a_j, b_j]$ для многомерного оператора Шрёдингера и получил оценки этого роста.

Разложение (17.5) имеет место и в дискретном случае, где все пространства $\mathscr{H}_p$ конечномерны. Тем самым, $A|\mathscr{H}_p$ и A_p будут операторами в конечномерном пространстве и число функций $E_j(p)$ в (17.6) конечно, так что спектр самосопряженного разностного Г-периодического оператора также имеет вид (17.7), но при этом число отрезков в (17.7) всегда конечно. Интересны обратные задачи о восстановлении коэффициентов оператора A по тем или иным спектральным данным, например, по энергетическим полосам $E_j(p)$, по какой-то их части, по их значениям при каком-то фиксированном p (например, по периодическим собственным значениям) и т. п. Эти вопросы изучались для оператора Шрёдингера $A = -\Delta + q(x)$ в работах Эскина, Ралстона и Трубовица (см. [225] и имеющиеся там ссылки), использовавших метод гиперболического уравнения (см. § 14). Они показали, что если потенциал q аналитичен и решетка Г такова, что из условий $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $|\gamma| = |\gamma'|$ вытекает одно из равенств $\gamma = \pm\gamma'$, то все функции $E_j(p)$, $j=1, 2, \ldots$ восстанавливаются по набору чисел $E_j(0)$, $j=1, 2, \ldots$, т. е. по периодическим собственным значениям или, более общо, по набору $E_j(p_0)$, $j=1, 2, \ldots$, если p_0 таково, что $\cos(p_0 \cdot \gamma) \neq 0$ для любого $\gamma\in\Gamma$. Используя асимптотические разложения ядра теплопроводности (см. § 12) такого оператора в различных одномерных направлениях эти авторы показывают, что по энергетическим полосам оператора A можно восстановить все энергетические полосы «редуцированных операторов» с потенциалами

$$q_\gamma(x)=\int_0^1 q(x+s\gamma)\,ds=\sum_{\{\delta:\delta\cdot\gamma=0\}} a_\delta e^{i\delta\cdot x},$$

если $q(x)=\sum_{\delta\in\Gamma'} a_\delta e_{i\delta x}$. Это позволяет восстановить энергетические полосы одномерных операторов $\left(-|\delta|^2\frac{d^2}{ds^2}+Q_\delta(s)\right)$, где $Q_\delta(s)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{n\delta}e^{ins}$ и воспользоваться теорией одномерной обратной задачи. Эти же авторы доказали, что для аналитического потенциала $q(x)$ общего положения имеется лишь конечное число потенциалов, для которых соответствующие операторы Шрёдингера имеют те же периодические собственные значения.

Отметим, что энергетические полосы $E_j(p)$ полезно изучать также при комплексных значениях квазиимпульса p, т. е. рассматривать их аналитическое продолжение. Изучая аналитическое продолжение функций одного переменного вида $f(\lambda)=E_j(\lambda p_0)$, Аврон и Саймон [175] показали, что в случае оператора Шрёдингера единственными возможными изолированными особенностями такого продолжения являются точки ветвления, а если особенностей вовсе нет (т. е. $E_j(\lambda p_0)$ продолжается до целой функции), причем $p_0\in\Gamma$, то $f(\lambda)=(p_1+\lambda p_0)^2+C$, где $p_1\in\Gamma'$ (это означает, что полоса такая же, как для потенциала $q\equiv c$). П. А. Кучмент [86] рассмотрел для общего эллиптического оператора A с периодическим коэффициентами множество Λ таких пар $(p,\lambda)\in\mathbf{C}^{n+1}$, что уравнение $A\psi=\lambda\psi$ имеет блоховское решение с квазиимпульсом p (пересечение $\Lambda\cap\mathbf{R}^{n+1}$ в самосопряженном случае дает объединение графиков всех функций $E_j(p)$). Он доказал, что Λ является множеством всех нулей целой функции порядка n (вообще говоря, бесконечного типа) в $\mathbf{C}^{n+1}$. Отсюда в случае самосопряженного A можно вывести, что любая неприводимая компонента Λ_α аналитического множества Λ вне некоторого аналитического подмножества $\Lambda_\alpha'\subset\Lambda_\alpha$ (имеющего в $\mathbf{C}^{n+1}$ коразмерность не менее 2), может быть представлена как график аналитической функции от p. Кроме того, проекция $\Lambda\to\mathbf{C}^n$ в этом случае плотна, причем если K — дополнение к этой проекции, то пересечение K с любой комплексной прямой $\{a\lambda+b\}$ в $\mathbf{C}^n$ (не лежащей в K) имеет нулевую емкость. В частности, K не разделяет $\mathbf{C}^n$. В случае одномерного оператора Шрёдингера все функции $E_j(p)$ получаются друг из друга аналитическим продолжением (т. е. Λ неприводимо) и они могут быть изучены значительно более детально, но мы не будем на этом останавливаться.

17.2. Характер спектра операторов с периодическими коэффициентами. Описанное в предыдущем разделе разложение по блоховским собственным функциям дает спектральное разложение данного эллиптического самосопряженного дифференциального оператора A с периодическими коэффициентами или разностного Г-периодического оператора A. А именно, если ввести пространство M с мерой $d\mu$, получаемое как объединение счетного в непрерывном случае и конечного в дискретном случае числа непересекающихся экземпляров B_j, $j=1, 2, \ldots$, зоны Бриллюэна B с мерой dp и задать в $L_2(M, d\mu)$ оператор умножения на функцию $a=a(m)$, равную $E_j=E_j(p)$ на $B_j=B$, то исходный оператор A, заданный в $L_2(\mathbf{R}^n)$, будет унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию a в $L_2(M, d\mu)$. Поэтому в терминах энергетических полос $E_j(p)$ легко полностью описать характер спектра оператора A. Заметим, например, что точечный спектр $\sigma_p(A)$ любого оператора умножения на вещественнозначную функцию a в $L_2(M, d\mu)$ описывается следующим образом:

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \mu\{m: a(m)=\lambda\}>0$$

Для исходного оператора A в терминах энергетических полос E_j это означает, что

$$\lambda \in (_p(A) \Leftrightarrow \operatorname{mes}\{p: \exists j,\ E_j(p)=\lambda\}>0. \qquad (17.9)$$

Учитывая кусочную аналитичность функций $E_j(p)$, мы видим, что последнее условие равносильно тому, что $\lambda \in \sigma(A_p)$ при всех p или, иными словами, что $E_j(p)\equiv\lambda$ для какого-то j при подходящем выборе иумерации собственных значений $E_j(p)$ (не обязательно монотонном). С помощью теории возмущений можно показать, что это невозможно, например, в случае, когда оператор A есть оператор Шрёдингера в $\mathbf{R}^3$ с потенциалом из $L_2(\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3)$ (Томас [343], см. также П. А. Кучмент [86]) или в более общем случае, когда A есть оператор Шрёдингера с таким периодическим потенциалом в $\mathbf{R}^n$, что набор его коэффициентов Фурье принадлежит $l_2(\Gamma')$ при $n=2, 3$ и $l_\beta(\Gamma')$ с $\beta<(n-1)/(n-2)$ при $n>3$ (см. Рид и Саймон [312, т. 4, теорема XIII, 100]). Более того, если точечный спектр отсутствует, то из кусочной аналитичности функций E_j легко следует, что весь спектр абсолютно непрерывен (в частности, это верно в вышеупомянутых случаях для оператора Шрёдингера). П. А. Кучмент доказал, что для общего эллиптического оператора A с гладкими периодическими коэффициентами включение $\lambda \in \sigma_p(A)$ равносильно тому, что уравнение $(A-\lambda I)u=0$ имеет такое решение, что $|u(x)|\leqslant c_a \exp(-a|x|)$ для любого $a>0$. Он же распространил утверждение об отсутствии точечного спектра на некоторые более общие операторы вида $L(D)+q(x)$.

Спектр и энергетические полосы оператора Хилла $A=-d^2/dx^2+q(x)$ (пусть $q(x+a)=q(x)$) могут быть выражены в терминах следа матрицы монодромии, называемого также *дискриминантом Хилла.* А именно, введем *оператор монодромии* — оператор $M(\lambda)$ сдвига на a в 2-мерном пространстве всех решений уравнения $A\psi=\lambda\psi$. Если выбрать два стандартных решения $c(x)$ и $s(x)$, определяемых начальными условиями $c(0)=s'(0)=1$, $c'(0)=s(0)=0$, то в базисе из этих решений оператор $M(\lambda)$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} c(a) & s(a) \\ c'(a) & s'(a) \end{pmatrix},$$

определитель которой равен 1, по теореме Лиувилля, как определитель Вронского решения $c(x)$ и $s(x)$, не зависящий от x и равный 1 при $x=0$. След этой матрицы $D(\lambda)=c(a)+s'(a)$ и называется *дискриминантом Хилла.* Блоховские собственные функции с собственным значением λ суть собственные векторы оператора $M(\lambda)$ с собственными значениями $e^{\pm ipa}$, где p — квазиимпульс. Поэтому числа $e^{\pm ipa}$ суть решения характеристического уравнения матрицы монодромии, имеющего вид

$$\mu^2-D(\lambda)\mu+1=0,$$

откуда $D(\lambda)=2\cos(pa)$. Далее, из этого же уравнения легко получается, что если $|D(\lambda)|\leqslant 2$, то его решения $\mu_{1,2}$ по модулю равны 1, а это значит, что существует ограниченная блоховская собственная функция. Если же $|D(\lambda)|>2$, то при подходящей нумерации $|\mu_1|>1$, $|\mu_2|<1$ и существуют два решения уравнения $A\psi=\lambda\psi$, из которых одно экспоненциально убывает на $-\infty$ и экспоненциально растет на $+\infty$, а второе наоборот. Из таких двух решений легко сконструировать функцию Грина, так что в этом случае $\lambda\notin\sigma(A)$. В то же время из ограниченного блоховского решения уравнения $A\psi=\lambda\psi$ стандартными срезками легко получить последовательность почти собственных функций с компактным носителем, откуда $\lambda\in\sigma(A)$. Итак, мы видим, что

$$\lambda\in\sigma(A)\Leftrightarrow|D(\lambda)|\leqslant 2. \qquad (17.10)$$

Можно показать (см., например, [202]), что график функции $D(\lambda)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.

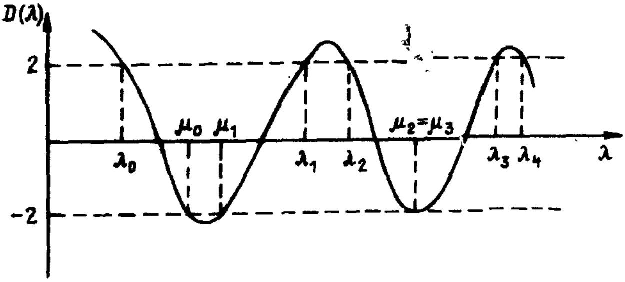

Рис. 1

На этом рисунке λ_j — собственные значения периодической задачи, а μ_j — собственные значения антипериодической задачи, т. е. значения параметра λ, при которых существует периодическое с периодом a (соответственно, антипериодическое, т. е. такое, что $\psi(x+a)=-\psi(x)$) решения уравнения $A\psi=\lambda\psi$. Из теорем о нулях решений уравнения 2-го порядка можно вывести следующее чередование этих собственных значений

$$\lambda_0<\mu_0\leqslant\mu_1<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_2\leqslant\mu_3<\lambda_3\leqslant\lambda_4<\ldots.$$

При этом $(-\infty,\lambda_0)$, (μ_0,μ_1), (λ_1,λ_2), (μ_2,μ_3), $(\lambda_3,\lambda_4),\ldots$ — запрещенные зоны (некоторые из них могут исчезать; например, на рисунке нет зоны (μ_2,μ_3)). Длины запрещенных зон обычно стремятся к 0; например, если $q\in C^\infty$, то они стремятся к 0 быстрее любой степени номера:

$$|\lambda_{2j}-\lambda_{2j-1}|\leqslant c_N j^{-N},\quad |\mu_{2j+1}-\mu_{2j}|\leqslant c_N j^{-N}. \tag{17.11}$$

(см., например, В. А. Марченко [108]; отметим, что А. Я. Гордон [52] доказал убывание длин лакун в случае произвольного, не обязательно периодического, ограниченного измеримого потенциала q). Производная $D'(\lambda)$ обращается в 0 лишь на отрезках $[\mu_0,\mu_1]$, $[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\mu_2,\mu_3]$, $[\lambda_3,\lambda_4],\ldots$ (т. е. в замыкании лакун или в точках, полученных слиянием концов исчезнувшей лакуны) и притом ровно по одному разу в каждом таком отрезке (все нули производной невырождены). В частности, $D(\lambda)$ строго монотонна на каждом из участков спектра $[\lambda_0,\mu_0]$, $[\mu_1,\lambda_1]$, $[\lambda_2,\mu_2]$, $[\mu_3,\lambda_3],\ldots$.

Полное описание возможных зон и лакун для потенциалов фиксированной соболевской гладкости дано В. А. Марченко и И. В. Островским [109]. В работе В. А. Марченко [107] даются постановка и решение обратной спектральной задачи для оператора Хилла, применимые к исследованию и решению нелинейных уравнений типа уравнения Кортевега—де Фриза (см. обзор [61] по поводу различных аспектов исследования таких уравнений, в том числе о связях со спектральной теорией).

С другой стороны, работа С. П. Новикова [123] содержит ряд конкретных аспектов исследования двумерного оператора

Шрёдингера с периодическим магнитным полем (при этом входящий в оператор магнитный потенциал не обязательно периодичен). В частности, в ней указаны двумерный аналог конечнозонных операторов и случай, когда собственные функции основного состояния могут быть найдены явно.

17.3. Количественные характеристики спектра: глобальный квазиимпульс, число вращения, плотность состояний, спектральная функция. Описанное выше поведение функции $D(\lambda)$ позволяет ввести *глобальный квазиимпульс* $p=p(\lambda)$ как непрерывную неубывающую функцию от $\lambda \in \mathbb{R}$, равную 0 на $(-\infty, \lambda_0]$, постоянную на каждой лакуне (μ_0, μ_1), (λ_1, λ_2), (μ_2, μ_3), ... и удовлетворяющую уравнению $2\cos(p(\lambda)a)=D(\lambda)$ при $\lambda \in \sigma(A)$ (такая функция $p(\lambda)$ существует и единственна). В частности, отсюда следует, что $p(\lambda)=\pi/a$ при $\lambda \in [\mu_0, \mu_1]$, $p(\lambda)=\frac{2\pi}{a}$ при $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и вообще $p(\lambda)=\frac{l\pi}{a}$ в замыкании l-й лакуны (считая лакуны, превратившиеся в точки). При каждом $\lambda \in \sigma(A)$ уравнение $A\psi=\lambda\psi$ имеет блоховские решения ψ_λ, $\overline{\psi_\lambda}$ с квазиимпульсом $\pm p(\lambda)$ (и если λ не является периодическим или квазипериодическим собственным значением, то эти решения линейно независимы), которые мы будем считать нормированными соотношением $\frac{1}{a}\int_0^a |\psi_\lambda(x)|^2\,dx=1$ (такая нормировка удобна тем, что она не меняется, если рассмотреть задачу как периодическую с кратным периодом la при любом целом $l>0$). Через эти решения и глобальный квазиимпульс можно, например, выразить спектральную функцию $e(\lambda; x, y)$ оператора Хилла:

$$e(\lambda; x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} \operatorname{Re}\left[\psi_\lambda(x)\overline{\psi_\lambda(y)}\right]dp(\lambda) \tag{17.12}$$

(это легко следует из разложения по блоховским собственным функциям, описанного в п. 17.1).

Другое понятие глобального квазиимпульса, полезное при исследовани обратной задачи для оператора Хилла, возмущенного убывающим потенциалом, использовалось в работах Н. Е. Фирсовой (см., например, [154]). Отметим, кстати, что исследованию такого возмущенного оператора Хилла посвящены также работы В. А. Желудева [66], Ф. С. Рофе—Бекетова (см. [137] и имеющиеся там ссылки), Л. А. Малоземова [103] и других авторов.

Глобальный квазиимпульс оператора Хилла имеет еще следующие две интерпретации: с точностью до множителя он совпадает с числом вращения $w(\lambda)$ и с проинтегрированной плотностью состояний $N(\lambda)$, которые определяются следующим образом.

Число вращения $w(\lambda)$ определяется с помощью любого нетривиального вещественного решения ψ уравнения $A\psi=\lambda\psi$ по формуле

$$w(\lambda)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\pi x}\operatorname{Arg}(\psi(x)+i\psi'(x)), \qquad (17.13)$$

где выбирается любая непрерывная по x ветвь аргумента. Можно доказать (Джонсон, Мозер [263]), что этот предел существует и не зависит от выбора решения. ψ. При этом $w(\lambda)=0$ при $\lambda<\inf\sigma(A)$. Функция w — непрерывная и неубывающая; она постоянна на каждой лакуне спектра оператора A, т. е. обладает свойствами, аналогичными свойствам глобольного квазиимпульса $p=p(\lambda)$. Поэтому неудивительно, что между $w(\lambda)$ и $p(\lambda)$ имеется простая связь

$$w(\lambda)=(2\pi)^{-1}p(\lambda). \qquad (17.14)$$

Наконец, *проинтегрированная плотность состояний* или *предельная функция распределения спектра* $N(\lambda)$ может быть определена формулой

$$N(\lambda)=\frac{1}{a}\int_0^a e(\lambda;\, x,\, x)\,dx, \qquad (17.15)$$

где $e(\lambda;\, x,\, y)$ — спектральная функция оператора A. Заметим, что из перестановочности спектрального проектора E_λ со сдвигом на a вытекает следующее важное свойство спектральной функции:

$$e(\lambda;\, x+a,\, y+a)=e(\lambda;\, x,\, y),$$

так что, в частности, функция $x\mapsto e(\lambda, x, x)$ периодична с периодом a и $N(\lambda)$ — среднее значение этой функции. Из (17.15) и положительной определенности ядра $e(\lambda, x, y)$ ясно, что $N(\lambda)$ — неубывающая функция, равная 0 при $\lambda<\inf\sigma(A)$ и постоянная по каждой лакуне. При этом спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством точек роста функции $N(\lambda)$, т. е.

$$\sigma(A)=\{\lambda : N(\lambda+\varepsilon)-N(\lambda-\varepsilon)>0 \text{ для любого } \varepsilon>0\}. \qquad (17.16)$$

Плотностью состояний называют обычно производную $\rho(\lambda)=\dfrac{dN(\lambda)}{d\lambda}$, но иногда меру на $\mathbf{R}$, определяемую функцией распределения $N(\lambda)$ (в нашем случае можно показать, что $N(\lambda)$ абсолютно непрерывна, так что $\rho(\lambda)$ — плотность этой меры), а в некоторых работах и саму функцию $N(\lambda)$. Смысл термина «плотность состояний» ясен из формулы

$$N(\lambda)=\lim_{L\to\infty}L^{-1}N_L(\lambda), \qquad (17.17)$$

где $N_L(\lambda)$ — обычная функция распределения спектра оператора A на отрезке $[0, L]$ или на любом другом отрезке длины L с какими-то фиксированными самосопряженными граничными условиями на концах. Идея доказательства существования предела (17.17) и самой этой формулы ниже будет пояснена в значительно более общем контексте. Этот предел существует и для одномерного разностного периодического оператора Шрёдингера, где он является определением $N(\lambda)$.

Укажем связь $N(\lambda)$ с глобальным квазиимпульсом

$$N(\lambda)=\frac{p(\lambda)}{\pi}, \tag{17.18}$$

вытекающую из (17.12) и (17.15). Из (17.18) и (17.14) вытекает связь $N(\lambda)$ с числом вращения

$$N(\lambda)=2w(\lambda). \tag{17.19}$$

Дифференцируя формулу $D(\lambda)=2\cos(p(\lambda)a)$ (здесь $\lambda\in\sigma(A)$), мы получаем выражение $\rho(\lambda)=N'(\lambda)=\pi^{-1}p'(\lambda)$ через $D(\lambda)$ вне концов запрещенных зон:

$$\rho(\lambda)=\frac{|D'(\lambda)|}{\pi a\sqrt{4-D^2(\lambda)}}\,\theta(4-D^2(\lambda)), \tag{17.20}$$

где θ — *функция Хевисайда* ($\theta(\mu)=1$ при $\mu>0$, $\theta(\mu)=0$ при $\mu\leqslant 0$). График функции $\rho(\lambda)$ ввиду описанных выше свойств $D(\lambda)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.

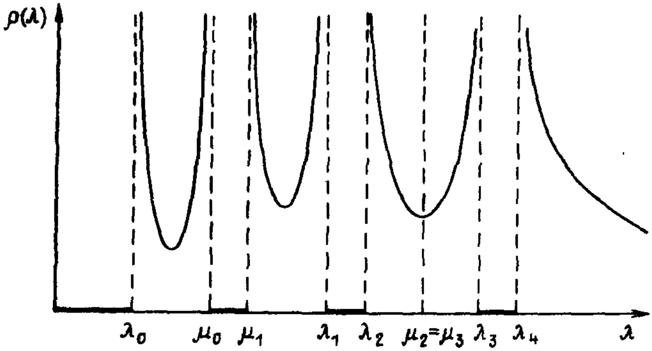

Рис. 2

В каждом конце $\tilde\lambda$ какой-либо запрещенной зоны имеется особенность типа $|\lambda-\tilde\lambda|^{-1/2}$; если запрещенная зона исчезла, то в соответствующей точке $\tilde\lambda$ особенности нет и в ней $\rho(\tilde\lambda)>0$ см., например, точку $\tilde\lambda=\mu_2=\mu_3$ на рис. 2; легко показать также, что $N\in C^\infty$ в окрестности такой точки, как и всюду вне концов настоящих запрещенных зон).

Обсудим теперь асимптотики введенных объектов при $\lambda\to+\infty$. Для этого заметим прежде всего, что если ψ — любое решение уравнения $A\psi=\lambda\psi$, то логарифмическая производная $u=\psi'/\psi$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$u'+u^2=q-\lambda. \tag{17.21}$$

Полагая $\lambda=\mu^2$, можно найти формальное асимптотическое решение этого уравнения в виде

$$u=i\mu\left(v_0+\frac{v_1}{\mu}+\frac{v_2}{\mu^2}+\ldots\right), \quad v_j=v_j(x), \tag{17.22}$$

где $v_0\equiv 1$, $v_1=0$, $v_2=q/2$ и далее

$$v_k=\frac{1}{2}\left[iv'_{k-1}-\sum_{r=1}^{k-1} v_r v_{k-r}\right], \quad k\geqslant 3,$$

откуда рекурентным образом все v_k находятся как полиномы от функции q и её производных. Мы получаем теперь, что уравнение $A\psi=\lambda\psi$ имеет формальное асимптотическое решение вида

$$\psi(x, \mu)=\exp\left[i\mu x+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}\int_0^x v_k(t)\,dt\right]. \tag{17.23}$$

Заменяя здесь бесконечную сумму на

$$\sum_{k=1}^{N}\mu^{-k}\int_0^x v_k(t)\,dt+\mu^{-N}\int_0^x \tilde{v}_N(t, \mu)\,dt$$

и переходя к интегральному уравнению для $\tilde{v}_N$, можнс методом последовательных приближений доказать существование такого его решения, что $\tilde{v}_N(t, \mu)=O(\mu^{-1})$ равномерно по $t\in[0, B]$ для любого фиксированного $B>0$ (В. А. Марченко [108]). Тем самым, для любого целого $N>0$ существует точное решение $\psi_N(x, \mu)$, которое удовлетворяет (17.23) с точностью до членов вида $O(\mu)^{-N}$. Учитывая периодичность всех функций v_k (с периодом a), мы видим, что функция ψ_N — «почти блоховская», точнее

$$\psi_N(x+a, \mu)=e^{ia[p_N(\mu)+O(\mu^{-N})]}\psi_N(x, \mu),$$

где

$$p_N(\mu)=\mu-\sum_{k=1}^{N} c_k\mu^{-k}, \quad c_k=\frac{i}{a}\int_0^a v_k(t)\,dt, \tag{17.24}$$

а $O(\mu^{-N})$ может зависеть от x (и равномерно по x при $x\in[0, B]$). Легко доказать, что все числа c_k вещественны (можно также показать, что $c_k=0$ при нечетных k). Решения ψ_N, $\overline{\psi}_N$ линейно независимы и в базисе $\{\psi_N, \overline{\psi}_N\}$ можно вычислить настоящую матрицу монодромии и затем настоящие квазиимпульс $p(\lambda)$ и блоховские собственные функции $\psi_\lambda(x)$, $\overline{\psi_\lambda(x)}$ мало отличающиеся от моделирующих их $p_N(\lambda)$, $\psi_N(x, \sqrt{\lambda})$, $\overline{\psi}_N(x, \sqrt{\lambda})$. В итоге получается, что $p(\lambda)$ имеет при $\lambda\to+\infty$ полное асимптотическое разложение и, значит, то же самое верно для

$w(\lambda)$ и $N(\lambda)$, так, что, например,

$$N(\lambda)=\pi^{-1}\sqrt{\lambda}+\lambda^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k\lambda^{-k} \tag{17.25}$$

(здесь коэффициенты d_k отличаются от коэффициентов c_k из (17.24) некоторым множителями и нумерацией). Эту асимптотику можно дифференцировать сколько угодно раз по λ на любом множестве вида

$$M_{\varepsilon,l}=\{\lambda:|\lambda-\hat{\lambda}_k|\leqslant\varepsilon\hat{\lambda}_k^{-l} \text{ при всех } k\},$$

где $\varepsilon>0$, $l>0$ произвольны, а точки $\hat{\lambda}_k$ выбраны так, что по одной из них находится в каждой лакуне спектра оператора A.

Используя описанную выше асимптотику блоховских собственных функций, можно получить полную асимптотику спектральной функции (Шенк, М. А. Шубин [156]):

$$e(\lambda;\, x,\, y)=\frac{\sin[\sqrt{\lambda}(x-y)]}{\pi(x-y)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left[f_k(x,\, y)\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\cos[\sqrt{\lambda}(x-y)]}{\lambda^{k+1/2}}\,d\lambda+\right.$$
$$\left.+g_k(x,\, y)\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\sin[\sqrt{\lambda}(x-y)]}{\lambda^{k}}\,d\lambda\right]+O(\lambda^{-N}), \tag{17.26}$$

где f_k, $g_k\in C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$. Эта асимптотика для любого фиксированного $B>0$ равномерна по таким $x, y\in\mathbf{R}$, что $|x-y|\leqslant B$. В частности, при $x=y$ получаем равномерно по всем $x\in\mathbf{R}$:

$$e(\lambda;\, x,\, x)\sim\pi^{-1}\sqrt{\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\,\lambda^{-k-1/2}. \tag{17.27}$$

Разумеется, отсюда интегрированием по x можно получить (17.25). Вне диагонали при $\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant A$ для любых фиксированных $\varepsilon>0$, $A>0$ и при любом $N=1, 2, \ldots$, интегрированием по частям из (17.26) легко получить асимптотику

$$e(\lambda;\, x,\, y)=\sum_{k=0}^{N}\{\lambda^{-k}p_k(x,\, y)\sin[\sqrt{\lambda}(x-y)]+$$
$$+\lambda^{-k-1/2}q_k(x,\, y)\cos[\sqrt{\lambda}(x-y)]\}+O(\lambda^{-N-1}), \tag{17.28}$$

где p_k, $q_k\in C_\infty$ при $x\neq y$.

Остановимся еще на описании проинтегрированной плотности состояний $N(\lambda)$ многомерных самосопряженных операторов с периодическими коэффициентами и с положительным главным символом. Как и в одномерном случае, спектральная функция $e(\lambda;\, x, y)$ такого оператора A обладает свойством периодичности

$$e(\lambda; x+\gamma, y+\gamma)=e(\lambda; x, y), \quad \gamma\in\Gamma,$$

где Γ — решетка периодов коэффициентов. В частности, функция $x\mapsto e(\lambda; x, x)$ является Γ-периодической и $N(\lambda)$ определяется как ее среднее значение

$$N(\lambda)=\frac{1}{\operatorname{mes} E_\Gamma}\int\limits_{E_\Gamma} e(\lambda; x, x)\,dx, \tag{17.29}$$

где E_Γ — элементарная ячейка решетки Γ. Легко видеть, что $N(\lambda)$ неубывающая функция, равная 0 при $\lambda<\inf\sigma(A)$, постоянная на каждой лакуне спектра, и спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством точек роста этой функции. Возможно описание $N(\lambda)$ типа (17.17) с помощью предельного перехода по раздувающимся областям, но мы дадим его ниже в более общем контексте, как и неспецифическую для периодического случая информацию об асимптотике $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$. Сейчас укажем выражение $N(\lambda)$ через энергетические полосы $E_j(p)$ (см. [165]):

$$N(\lambda)=(2\pi)^{-n}\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{mes}\{p: p\in B,\ E_j(p)\leqslant\lambda\}=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_B N_p(\lambda)\,dp, \tag{17.30}$$

где $N_p(\lambda)$ — обычная функция распределения дискретного спектра оператора $A_p=a_p(x, p+D_x)$ на торе $\mathbf{R}^n/\Gamma$. Эту формулу легко вывести из многомерного аналога (17.12):

$$e(\lambda; x, y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_B\sum_{E_j(p)\leqslant\lambda}\psi_{j,p}(x)\overline{\psi_{j,p}(y)}\,dp, \tag{17.31}$$

где $\psi_{j,p}$ — блоховская собственная функция оператора A с квазиимпульсом p, нормированная обычным образом:

$$\frac{1}{\operatorname{mes} E_\Gamma}\int\limits_{E_\Gamma}|\psi_{j,p}(x)|^2\,dx=1;$$

при этом $\psi_{j,p}$ надо считать выбранным измеримым по p образом.

Отметим еще, что для эллиптического самосопряженного полуограниченного оператора $A=a(D)$ с постоянными коэффициентами, который может рассматриваться как оператор с периодическими коэффициентами с любой решеткой периодов, из явной формулы для $e(\lambda; x, y)$

$$e(\lambda; x, y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\{\xi: a(\xi)<\lambda\}} e^{i(x-y)\cdot\xi}\,d\xi \tag{17.32}$$

получается и явная формула для $N(\lambda)$:

$$N(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{\xi: a(\xi)<\lambda\} \tag{17.33}$$

В частности, для $A=-\Delta$ получаем $N(\lambda)=(2\pi)^{-n}v_n\lambda^{n/2}\theta(\lambda)$, где v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$, θ — функция Хевисайда.

§ 18. Операторы с почти-периодическими коэффициентами

18.1. Общие определения. Существенная самосопряженность [158], [164]. Напомним, что непрерывная функция $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ называется *почти-периодической* (сокращенно п. п.) *по Бору* или *равномерно почти-периодической*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такой компакт $K\subset\mathbf{R}^n$, что каждый его сдвиг $x+K$ содержит *ε-почти период* функции f, т. е. такой вектор $\tau\in\mathbf{R}^n$, что $\sup_x|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$. Эквивалентное определение состоит в том, что семейство всех сдвинутых функций $\{f(\cdot+\tau),\ \tau\in\mathbf{R}^n\}$ должно быть предкомпактно в топологии равномерной сходимости на $\mathbf{R}^n$. Точно также определяются п. п. функции на $\mathbf{Z}^n$.

Операторы с п. п. коэффициентами могут моделировать в квантово-механических моделях движение электронов в средах с определенными отклонениями от периодичности, например, в некоторых жидкостях и сплавах. Кроме того, вопросы спектральной теории таких операторов возникают в ряде механических задач, например, при рассмотрении линеаризаций систем с условно периодическими движениями. В частности, имеется модель, в рамках которой структура спектра одномерных операторов с п. п. коэффициентами ответственна за сложную структуру колец Сатурна (Аврон, Саймон [176]).

Обозначим через $CAP(\mathbf{R}^n)$ множество всех п. п. по Бору функций на $\mathbf{R}^n$. Всякая п. п. по Бору функция f ограничена и если ввести обычную норму

$$\|f\|_\infty=\sup_x|f(x)|,$$

то с ней $CAP(\mathbf{R}^n)$ превращается в коммутативную банахову алгебру (с обычными операциями сложения и умножения). Плотным в $CAP(\mathbf{R}^n)$ является множество $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n)$ всех тригонометрических многочленов, т. е. конечных сумм вида

$$f(x)=\sum_\xi f_\xi e^{i\xi\cdot x},$$

так что $CAP(\mathbf{R}^n)$ можно представлять себе как множество всех функций на $\mathbf{R}^n$, являющихся равномерными пределами тригонометрических многочленов. Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $CAP(\mathbf{R}^n)$ называется *компактом Бора* и обозначается $\mathbf{R}^n_B$. Имеется естественное непрерывное вложение

$\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}_B^n$, при котором $\mathbf{R}^n$ превращается в плотное подмножество в $\mathbf{R}_B^n$. Сложение в $\mathbf{R}^n$ продолжается по непрерывности до операции, превращающей $\mathbf{R}_B^n$ в компактную топологическую группу. При этом $\mathbf{R}^n$ имеет в $\mathbf{R}_B^n$ меру 0 относительно меры Хаара на $\mathbf{R}_B^n$. Среднее значение п. п. по Бору функции f определяется формулой

$$M\{f\} = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^n} \int\limits_{|x_j| \leq R/2} f(x)\,dx \tag{18.1}$$

(можно показать, что предел существует для любой функции $f \in \mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$): достаточно рассмотреть тригонометрические многочлены). Среднее значение функции $f \in \mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$ можно также записать в виде

$$M\{f\} = \int\limits_{\mathbf{R}_B^n} \hat{f}\,d\mu_n, \tag{18.2}$$

где $d\mu_n$ — мера Хаара на $\mathbf{R}_B^n$ (нормированная так, что мера всей группы $\mathbf{R}_B^n$ равна 1), а $\hat{f}$ — продолжение функции f с $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}_B^n$ по непрерывности. Пользуясь средним значением, можно ввести на $\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$ скалярное произведение

$$(f, g)_B = M\{f \cdot \bar{g}\}.$$

Пополнение $\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$ по соответствующей норме есть *пространство Безиковича* $B^2(\mathbf{R}^n)$, которое, в силу (18.2), канонически изоморфно $L_2(\mathbf{R}_B^n) = L_2(\mathbf{R}_B^n, d\mu_n)$. Пространство $B^2(\mathbf{R}^n)$ представляет собой несепарабельное гильбертово пространство, в котором ортонормированный базис образуют все экспоненты $\{e^{2\pi i \xi \cdot x}, \xi \in \mathbf{R}^n\}$. Разлагая по этому базису любую функцию $f \in \mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$, мы получим ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{2\pi i \xi_k \cdot x}, \quad f_k = M_x\{e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} f(x)\},$$

называемый *рядом Фурье* функции f (отметим, что $M_x\{e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x)\} = 0$ для всех векторов ξ за исключением некоторого не более чем счетного множества). Здесь векторы ξ_k называются частотами, а наименьший $\mathbf{Z}$-подмодуль в $\mathbf{R}^n$, порожденный множеством всех частот, называется *модулем частот* функции f. Модуль частот может быть определен также с помощью понятия оболочки. *Оболочкой* $H(f)$ функции f называется замыкание множества сдвигов $\{f(\cdot + \tau), \tau \in \mathbf{R}^n\}$ в топологии равномерной сходимости. Имеется каноническое отображение $\mathbf{R}^n \to H(f)$, переводящее вектор τ в $f(\cdot + \tau)$. При этом образ плотен в $H(f)$, и сложение в $\mathbf{R}^n$ по непрерывности продолжается до операции, индуцирующей на $H(f)$ структуру компактной абелевой группы, у которой дуальная группа (группа характеров) может быть отождествлена с модулем частот, если заметить, что ограничение любого характера на $\mathbf{R}^n$ является характером группы $\mathbf{R}^n$ и, следовательно, имеет вид $e^{2\pi i\xi\cdot x}$, причем вектор-частота ξ однозначно определяет этот характер. Оболочку можно также определить как множество сдвигов $\overline{\{\hat{f}(\cdot+\tau),\ \tau\in\mathbf{R}_B{}^n\}}$, где $\hat{f}$ продолжение функции f на $\mathbf{R}_B{}^n$ по непрерывности. Группа $H(f)$ тогда есть факторгруппа $\mathbf{R}_B{}^n$ по подгруппе тех $\tau\in\mathbf{R}_B{}^n$, сдвиги на которые не меняют $\bar{f}$.

Введем еще пространство

$$\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)=\{f: f\in C^\infty(\mathbf{R}^n),\ \partial^\alpha f\in \mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n) \text{ для любого } \alpha\}.$$

Рассмотрим формально самосопряженный равномерно эллиптический оператор A вида (17.1) с коэффициентами $a_\alpha\in\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Такие операторы мы будем для краткости называть *самосопряженными эллиптическими* п. п. *операторами* (часто достаточно предполагать лишь, что $a_\alpha\in\mathrm{CAP}(\mathbf{R}^n)$, однако мы для простоты ограничимся рассмотрением гладкого случая).

Оператор A можно рассмотреть как неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ или $S(\mathbf{R}^n)$ или как неограниченный оператор в $B^2(\mathbf{R}^n)$ с областью определения $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n)$ или $\mathrm{CAP}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Оба эти оператора являются существенно самосопряженными (при этом в первом случае почти периодичность несущественна). Для доказательства можно использовать в первом случае шкалу соболевских пространств $H^s(\mathbf{R}^n)$, а во втором — аналогичную шкалу пространств $H^s(\mathbf{R}_B{}^n)$, определяемых как пополнения $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n)$ по норме

$$\Big\|\sum_\xi f_\xi e^{i\xi\cdot x}\Big\|_{s,B}=\Big(\sum_\xi(1+|\xi|^2)^{s/2}|f_\xi|^2\Big)^{1/2}.$$

В обеих этих шкалах верны теоремы об эллиптической регулярности, имеющие вид

$$\{u\in H^{-\infty},\ Au=f\in H^s\}\Rightarrow u\in H^{s+m} \tag{18.3}$$

(здесь $H^{-\infty}=\bigcup\limits_{s\in\mathbf{R}} H^s$), которые могут быть получены, например, с помощью техники псевдодифференциальных операторов. Из (18.3) следует, что область определения максимального оператора, ассоциированного с A, есть пространство H^m. С другой стороны ясно, что H^m входит в область определения минимального оператора, так что минимальный и максимальный операторы совпадают, что равносильно существенной самосопряженности.

18.2. Общие свойства спектра и собственных функций. Рассмотрим теперь самосопряженные операторы в пространствах $L_2(\mathbf{R}^n)$ и $B^2(\mathbf{R}^n)$, полученные замыканием описанных выше операторов, заданных одним и тем же выражением A вида (17.1) на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n)$ соответственно; обозначим через $\sigma(A)$ спектр первого из них, а через $\sigma_B(A)$ спектр второго.

Теорема 18.1 (*Теорема о совпадении спектров*, М. А. Шубин [160]):

$$\sigma(A)=\sigma_B(A). \tag{18.4}$$

Отметим, что здесь речь идет лишь о совпадении спектров как подмножеств в $\mathbf{R}$. Характер спектров оператора A в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и в $B^2(\mathbf{R}^n)$ может быть совершенно различным. Например, если оператор $A=a(D)$ имеет постоянные коэффициенты, то его спектр в $L_2(\mathbf{R}^n)$ абсолютно непрерывен, в то время как в $B^2(\mathbf{R}^n)$ его спектр является чисто точечным. Аналогично для операторов с периодическими коэффициентами ортогональный базис из собственных функций в пространстве $B^2(\mathbf{R}^n)$ можно составить из блоховских собственных функций оператора A. Однако спектр этого же оператора в $L_2(\mathbf{R}^n)$ уже, вообще говоря, не будет точечным (и более того, точечного спектра может вообще не быть, как в случае оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом — см. п. 17.2).

Доказательство теоремы 18.1 может быть получено с помощью аппроксимации функции из $CAP^\infty(\mathbf{R}^n)$ функциями из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ (это делается с помощью стандартных срезок) и, наоборот, «аппроксимации» каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ такими функциями $\psi_k\in CAP^\infty(\mathbf{R}^n)$, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\psi_k\|_B^2=\|\varphi\|^2,\quad \lim_{k\to\infty}\|(A-\lambda I)\psi_k\|_B^2=\|(A-\lambda I)\varphi\|^2.$$

Последнее удается сделать, беря в качестве ψ_k свертку

$$\psi_k(x)=\int\chi_k(x-y)\varphi(y)\,dy \tag{18.5}$$

с некоторой последовательностью функций $\chi_k\in CAP^\infty(\mathbf{R}^n)$, специальным образом подбираемой и зависящей от коэффициентов оператора A. Другой подход, позволяющий доказать теорему 18.1 с помощью теории C^*-алгебр, предложен Р. А. Бикташевым и А. С. Мищенко [17], а также Бааж, [179].

Теорема 18.1 верна также для псевдодифференциальных операторов с п. п. по x символами в $\mathbf{R}^n$ и притом не только для самосопряженных; требование эллиптичности также может быть ослаблено (эллиптичность используется лишь в доказательстве существенной самосопряженности; вместо эллиптичности достаточно предполагать некоторое условие гипоэллиптичности, а в случае псевдодифференциальных операторов 0-го порядка утверждение верно без всяких дополнительных условий).

Весь спектр эллиптического п. п. оператора A является существенным, т. е. он не содержит изолированных собственных значений конечной кратности. В самом деле, из всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которой $\|\varphi\|=1$ и $\|(A-\lambda I)\varphi\|<\varepsilon/2$ сдвигами ее на достаточно большие векторы, являющиеся δ-почти периодами функций a_α и их производных до порядка m при достаточно малом $\delta>0$, мы получаем ортонормированную систему функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, для которой $\|(A-\lambda I)\varphi_j\|<\varepsilon$ при всех $j=1, 2, \ldots$ Отсюда сразу следует существенность спектра оператора A в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, если $\lambda \in \sigma(A)$, то вышеописанные свертки (18.5) для функций φ_j из только что построенной ортогональной системы при достаточно большом k дают «почти ортогональную» в $B^2(\mathbf{R}^n)$ систему функций $\psi_j \in CAP^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которых $\|\psi_j\|_B^{-1}\|(A-\lambda I)\psi_j\|_B<\varepsilon$, что доказывает существенность спектра оператора A в $B^2(\mathbf{R}^n)$.

При $n=1$ собственные значения не могут быть бесконечнократными (их кратность не превосходит $\operatorname{ord} A$), так что спектр $\sigma(A)$ в этом случае представляет собой совершенное множество (замкнутое множество без изолированных точек). При некоторых более специальных предположениях здесь могут быть получены существенно более точные результаты, описание которых будет дано ниже.

Для изучения спектра эллиптического п. п. оператора A полезно понятие оболочки п. п. оператора, аналогичное понятию оболочки функции. А именно, *оболочкой* $H(A)$ оператора $A=a(x, D_x)$ называется множество всех операторов $\tilde{A}=\tilde{a}(x, D_x)$, символы которых $\tilde{a}(x, \xi)$ суть равномерные (по x) пределы сдвигов $a(x+\tau, \xi)$ символа оператора A. Иными словами, $\tilde{A} \in H(A)$, если $\tilde{A}=\sum_{|\alpha|\leqslant m} \tilde{a}_\alpha(x) D^\alpha$ и существует такая последовательность $\{\tau_k, k=1, 2, \ldots\}$, что $\tilde{a}_\alpha(x)=\lim_{k\to+\infty} a(x+\tau_k)$ равномерно по x при всех α с $|\alpha|\leqslant m$ (здесь a_α — коэффициенты оператора A). Легко видеть, что $\sigma(\tilde{A})=\sigma(A)$ для любого $\tilde{A} \in H(A)$. Как и в случае одной функции, оболочка $H(A)$ имеет структуру компактной топологической группы. На этой группе удобно рассматривать меру Хаара и в этом смысле мы можем говорить о выполнении какого-либо свойства почти везде (п. в.) на $H(A)$ или при почти всех (п. в.) $\tilde{A} \in H(A)$. Пример использования понятия оболочки: если A — эллиптический п. п. оператор, то $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует такой оператор $\tilde{A} \in H(A)$, что уравнение $\tilde{A}u=\lambda u$ имеет ограниченное решение (М. А. Шубин [164]). Укажем еще замечательное свойство подвижности точечного спектра одномерного оператора Шрёдингера с п. п. потенциалом, указанное Л. Л. Пастуром [303]: для любого фиксированного $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\mu\{\tilde{A}:\tilde{A}\in H(A),\quad \lambda\in\sigma_p(\tilde{A})\}=0,$$

где μ — мера Хаара на $H(A)$. Пояснение этого свойства мы сделаем в более общем контексте случайных операторов (где оно и было доказано Л. А. Пастуром). Кирш и Мартинелли [270] доказали в этой же ситуации существование таких фиксированных замкнутых подмножеств S_1, S_2, S_3 в $\mathbf{R}$, что для п. в. $\tilde{A}\in H(A)$ замыкание точечного спектра совпадает с S_1, абсолютно непрерывный спектр совпадает с S_2, а сингулярный непрерывный спектр совпадает с S_3. Из вышеуказанного результата Л. А. Пастура вытекает теперь, что S_1 локально несчетно, т. е. если $\lambda_0\in S_1$, то множество $S_1\cap(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$ несчетно для любого $\varepsilon>0$. А. В. Марченко [106] показал, что спектр $\sigma(A)$ самосопряженного эллиптического п. п. оператора может быть аппроксимирован спектрами $\sigma(A_k)$ операторов в ограниченных областях с подходящими граничными условиями в том смысле, что

$$\sigma(A)=\bigcap_m \overline{\bigcup_{k>m}\sigma(A_k)},$$

(т. е. $\sigma(A)$ — предел последовательности спектров $\sigma(A_k)$). Не следует думать, что наличие чисто точечного спектра в пространстве $B^2(\mathbf{R}^n)$, имеющее место для операторов с постоянными и периодическими коэффициентами, является типичным и для операторов с п. п. коэффициентами. В дальнейшем мы увидим, что уже для одномерного оператора Шрёдингера с п. п. потенциалом могут быть самые разнообразные возможности (например, чисто точечный спектр в $L_2(\mathbf{R})$ с экспоненциально убывающими собственными функциями, что исключает точечный спектр в $B^2(\mathbf{R})$). Общих результатов о структуре спектра и поведении собственных функций для многомерных п. п. операторов известно немного. Укажем один из них, относящийся к оператору Шрёдингера с квазипериодическими коэффициентами.

Функция $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ называется *квазипериодической*, если $f\in CAP(\mathbf{R}^n)$ и f имеет ряд Фурье вида

$$f(x)=\sum_{m_1,\ldots,m_N\in\mathbf{Z}} c_{m_1\ldots m_N}e^{2\pi i(m_1\alpha_1+\ldots+m_N\alpha_N)\cdot x}, \tag{18.6}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_N\in\mathbf{R}^n$. Это означает, что f имеет конечнопорожденный модуль частот $\{m_1\alpha_1+\ldots+m_N\alpha_N:m_1,\ldots,m_N\in\mathbf{Z}\}$. Квазипериодическая функция f описанного вида может быть получена как композиция $f=\hat{f}\circ\pi$, где отображение $\pi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{T}^N$ является непрерывным гомоморфизмом $\mathbf{R}^n$ в тор $\mathbf{T}^N=\mathbf{R}^N/\mathbf{Z}^N$, имеющим вид $\pi\circ j$, где $j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^N$ — линейное отображение $p:\mathbf{R}^N\to\mathbf{T}^N$ — каноническая проекция, $\hat{f}\in C(\mathbf{T}^N)$. Разложение в ряд (18.6) может быть получено теперь с помощью разложения $\hat{f}$ в обычный ряд Фурье. Если функция $\hat{f}$ достаточно гладкая, то ряд (18.6) будет абсолютно и равномерно сходящимся. Будем писать, что $f\in\in\hat{C}^r$, если $\hat{f}\in C^r(\mathbf{T}^N)$. Важную роль играет *арифметическое* (или *диофантово*) условие

$$\exists k>0,\ \exists c>0: \left|\sum_{j=1}^{N} m_j\alpha_j\right| \geqslant c\,|m|^{-k},$$
$$m=(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbf{Z}^N\diagdown\{0\}. \tag{18.7}$$

Это условие означает линейную независимость векторов $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел в несколько усиленном виде. Нетрудно показать, что оно выполнено для данного N при почти всех наборах векторов $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ (по мере Лебега на $\mathbf{R}^{nN}$).

Следующий результат является практически единственным содержательным результатом о собственных функциях, относящимся к многомерному случаю.

Теорема 18.2 (С. М. Козлов [78]). Пусть $A=-\Delta+q(x)$, где q — квазипериодическая функция класса $\hat{C}^r$ на $\mathbf{R}^n$, выполнено арифметическое условие (18.7), r достаточно велико (в зависимости от k в (18.7), а норма функции q в $\hat{C}^r$ (равная норме функции $\hat{q}$ в $C^r(\mathbf{T}^N)$) достаточно мала. Тогда если $\lambda_0= =\inf\sigma(A)$, то уравнение $A\psi=\lambda_0\psi$ имеет всюду положительное отделенное от нуля решение ψ, квазипериодическое с тем же модулем частот, что и у потенциала q, и принадлежащее $\hat{C}^s$, где $s=s(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$.

Доказательство этой теоремы использует метод ускоренной сходимости Колмогорова — Арнольда — Мозера, который позволяет здесь методом последовательных приближений найти такие число λ_0 и квазипериодическую функцию ψ, обладающую свойствами, указанными в формулировке теоремы, что

$$\psi(A-\lambda_0 I)\psi=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi^2\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Отсюда легко вытекает утверждение теоремы. При этом оказывается, что $\lambda_0=\inf\sigma(A)$. Отметим, что квазипериодическое (и даже любое п. п.) решение ψ уравнения $(A-\lambda_0 I)\psi=0$ единственно.

В случае, если не налагать требование малости потенциала $q(x)$, может оказаться, что уравнение $(A-\lambda_0 I)\psi=0$ не имеет квазипериодических и даже п. п. решений. А именно, уже в одномерном случае может случиться, что все решения этого уравнения принадлежат $L_2(\mathbf{R})$ (см. ниже).

18.3. Спектры одномерных операторов Шрёдингера с почти периодическим потенциалом. Рассмотрим одномерный оператор Шрёдингера $A=-d^2/dx^2+q(x)$ с п. п. потенциалом $q\in CAP(\mathbf{R})$. Для этого оператора в отличие от операторов с периодическим потенциалом спектр уже не обязан иметь зонную структуру и, более того, как мы сейчас увидим, естественно ожидать, что он будет *канторовским совершенным множеством* (не обязательно лебеговой меры 0) т. е. замкнутым подмножеством без изолированных точек в $\mathbf{R}$, имеющим всюду плотное дополнение. Кроме того, спектр здесь может иметь сингулярную непрерывную и точечную компоненты, но может и остаться абсолютно непрерывным.

Поясним причину тенденции спектра быть канторовским совершенным множеством, следуя Саймону [323]. Рассмотрим двоякопериодическую функцию

$$f(x, y)=\sum_{n_1,n_2\in\mathbf{Z}} a_{n_1,n_2} \exp[2\pi i(n_1x+n_2y)],$$

где коэффициенты a_{n_1,n_2} достаточно быстро убывают при $|n|\to\infty$ (здесь $n=(n_1, n_2)$), $a_{-n}=\bar{a}_n$. Рассмотрим теперь оператор Шрёдингера A с потенциалом $q(x)=f(x, \alpha x)$, и пусть сначала $\alpha=r/s$, где целые положительные числа r, s взаимно просты. Тогда потенциал $q(x)$ является периодическим с периодом $2\pi s$. Его лакуны в общем положении находятся вблизи каждого из периодических и антипериодических собственных значений, которые асимптотически при малых q близки к таким же собственным значениям оператора $A_0=-d^2/dx^2$, равным $(\pi l/s)^2$, $l=0, 1, 2, \ldots$, или, что то же самое, $[\pi(n_1+n_2\alpha)]^2$, n_1, $n_2\in\mathbf{Z}$. Но естественно ожидать, что то же самое будет верно и при иррациональном α, а тогда точки вида $[\pi(n_1+n_2\alpha)]^2$, n_1, $n_2\in\mathbf{Z}$ всюду плотны на полуоси $[0, +\infty)$, так что если каждая из этих точек окружена лакуной, то дополнение к спектру будет открытым всюду плотным множеством на $[0, +\infty)$. Более точное соображение, опирающееся на теорию возмущений, выглядит следующим образом: если $a_{n_1,n_2}>0$ при всех n_1, n_2, то для оператора $A_\lambda=-d^2/dx^2+\lambda q(x)$ с тем же $q(x)$, что и выше (при $\alpha=r/s$), величина лакуны, окружающей точку $(2\pi l/s)^2$, равна при малом λ

$$2\lambda\left(\sum_{n_1+n_2\alpha=l/s} a_{n_1,n_2}\right)+O(\lambda^2),$$

так что если судить по первому приближению теории возмущений, все лакуны в этом случае непусты. При этом суммарная длина всех лакун в этом же приближении равна $O[\lambda\Sigma|a_n|]$, так что спектр, хотя и нигде не плотный, должен был бы иметь бесконечную лебеговскую меру.

Для формулировки точных утверждений рассмотрим вначале случай *предельно периодических потенциалов*, т. е. п. п. потенциалов, которые являются равномерными пределами периодических функций (можно показать, что это равносильно тому, что модуль частот имеет одну образующую над полем **Q**). В этом случае канторовость спектра независимо доказали Аврон и Саймон [177], Мозер [297] и В. А. Чулаевский [155]. А именно, имеет место

Теорема 18.3 (Аврон, Саймон [177]) В пространстве всех предельно периодических потенциалов (с обычной равномерной метрикой) существует плотное подмножество типа G_δ, состоящее из таких потенциалов q, что спектр соответствующего оператора Шрёдингера $A=-d^2/dx^2+q(x)$ есть канторовское совершенное множество. То же самое верно в пространстве потенциалов q специального вида

$$q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(x/2^n), \qquad \sum_n |a_n| < +\infty.$$

Доказательство может быть получено, если следить с помощью теории возмущений за появлением новых лакун в спектре при переходе от периодического потенциала к его возмущению, имеющему кратный период. При этом попутно получается, что существует плотное множество предельно периодических потенциалов (или потенциалов указанного выше специального вида), для которых спектр канторовский и одновременно абсолютно непрерывный (кратности 2). Абсолютная непрерывность спектра возникает, в частности, когда потенциал $q(x)$ быстро приближается периодическими потенциалами. Например, имеет место

Теорема 18.4 (В. А. Чулаевский [155). Пусть потенциал q имеет вид

$$q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n q_n(x/T_n), \tag{18.8}$$

где все функции q_n периодичны с периодом 1, $q_n \in C^2$, $\max|q_N| \leqslant 1$,

$$T_{n+1}/T_n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}, \quad \sum_{n=N}^{\infty} |\varepsilon_n| < \beta_N/T_N, \quad \beta_N \leqslant \exp(-c_N T_N), \quad c_N \to +\infty$$

при $N\to\infty$. Тогда спектр абсолютно непрерывный и двукратный, причем существуют собственные функции $\psi(x, \lambda)$ (решения уравнения $A\psi=\lambda\psi$) вида

$$\psi(x,\lambda)=e^{ip(\lambda)x}\chi(x,\lambda), \tag{18.9}$$

где χ предельно периодична по x (с теми же числами T_n), а $p(\lambda)$ — граничное значение аналитической функции, имеющей голоморфные ветви в комплексной плоскости с разрезом $\mathbf{C}\setminus\{\lambda : \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \geqslant \min q(x)\}$; ветви $p(\lambda)$ непрерывны вплоть до границы указанной области; $p(\lambda) \in \mathbf{R}$ в точках спектра, а вне спектра на вещественной оси (т. е. в лакунах) $p(\lambda) \in i\mathbf{R}\setminus\{0\}$. При этом существует такое всюду плотное в $C^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ множество $\mathscr{L}$, что если $q_n \in \mathscr{L}$, начиная с некоторого n, то спектр канторовский.

Однако спектр не обязан быть всегда абсолютно непрерывным (или даже просто непрерывным) даже в случае предельно-периодического потенциала. Например, С. А. Молчанов и В. А. Чулаевский [117] показали, что существуют предельно периодические потенциалы с канторовским чисто точечным спектром лебеговской меры 0 (и с собственными функциями, убывающими быстрее любой степени $|x|$ при $|x| \to \infty$, хотя и не экспоненциально). Примеры таких потенциалов получаются с использованием вероятностной техники, о чем еще пойдет речь ниже в § 19.

Ситуация, аналогичная теореме 18.4, может иметь место и для квазипериодических потенциалов, как показывают хронологически первые содержательные результаты об одномерных п. п. операторах, принадлежащие Е. И. Динабургу и Я. Г. Синаю [60] и Е. Д. Белоколосу [13], [14]. В случае одного независимого переменного квазипериодичность функции $q(x)$ означает, что она имеет вид

$$q(x) = f(\alpha_1 x, \alpha_2 x, \ldots, \alpha_N x), \tag{18.10}$$

где $f = f(y_1, \ldots, y_N)$ — периодическая непрерывная функция с периодом 1 по каждой переменной, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — произвольные вещественные числа. Ясно, что в этом случае функция q равномерно аппроксимируется тригонометрическими полиномами вида $\sum\limits_m c_m e^{2\pi i (m, \alpha) x}$, где $m \in \mathbf{Z}^N$, $(m, \alpha) = m_1\alpha_1 + \ldots + m_N\alpha_N$, и модуль частот ее равен $\{(m, \alpha), m \in \mathbf{Z}^N\}$.

Теорема 18.5 (Е. И. Динабург, Я. Г. Синай [60]). Пусть q имеет вид (18.10) с вещественно-аналитической функцией f и с набором $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, удовлетворяющим диофантову условию (18.7). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $C'(\varepsilon)$, $C''(\varepsilon) > 0$, что в каждой окрестности $O_m = \left\{\lambda : |\sqrt{\lambda} - \pi(m, \alpha)| < \frac{C'(\varepsilon)}{|(m, \alpha)| + 1}\right\}$ найдется такая окрестность

$$\tilde{O}_m = \left\{\lambda : |\sqrt{\lambda} - \lambda_m| \leqslant C''(\varepsilon) \exp\left[-\frac{|m|}{\ln^{1+\varepsilon}|m|}\right]\right\},$$

что если $\lambda \notin \bigcup\limits_m \tilde{O}_m = \mathfrak{M}$, то уравнение $A\psi = \lambda\psi$ имеет два линейно независимых решения ψ, $\bar{\psi}$, где ψ имеет вид (18.9) с квазипериодической функцией χ (вида (18.10) с тем же вектором $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$) и с таким показателем $p(\lambda)$, что $|p(\lambda) - \sqrt{\lambda}| \leqslant c'''/\sqrt{\lambda}$ при некоторой постоянной c'''.

Это означает, что вне экспоненциально малых отрезков (которые могут быть лакунами, а могут содержать какую-то часть спектра) оператор A имеет собственные функции типа блоховских функций (с заменой периодичности на квазипериодичность).

Отсюда нетрудно вывести, что спектр оператора A имеет абсолютно непрерывную компоненту, причем плотность абсолютно непрерывной компоненты меры $d(E_\lambda f, f)$ на множестве $[0, +\infty)\setminus\setminus\mathfrak{M}$ почти всюду совпадает с величиной $\frac{|\rho(\lambda)|^2}{2\pi\sqrt{\lambda}(1+o(1))}$, где

$$\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\psi(x, \lambda)}dx, \quad o(1)\to 0 \text{ при } \lambda\to+\infty.$$

Доказательство теоремы 18.5 основано на приводимости системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, к которой сводится уравнение $A\psi=\lambda\psi$, к системе с постоянными коэффициентами с помощью последовательных замен неизвестных функций, находимых с помощью КАМ-теории (метода ускоренной сходимости Колмогорова — Арнольда—Мозера). Некоторые уточнения теоремы 18.5 сдержатся в работах [298], [315]. После работы [60] КАМ-теория использовалась многими авторами с различных вопросах спектральной теории. С ее помощью, например, в работах [209], [310] построены примеры разностных п. п. операторов Шрёдингера с чисто точечным спектром (о других таких примерах будет идти речь в § 19), а Я. Г. Синай [142] доказал существование блоховских собственных функций вблизи левого края спектра у одномерного разностного оператора Шрёдингера, возникающего при линеаризации разностного аналога уравнения sine-Gordon.

Теорема 18.5 дает информацию о спектре лишь на некотором канторовском множестве достаточно большой меры, но ничего не говорит о том, что происходит в лакунах этого множества. В частности, из нее неясно, действительно ли спектр является канторовским. В связи с этим отметим, что Б. М. Левитан и А. В. Савин [98], используя известное описание конечнозонных потенциалов и возмущая данный конечнозонный потенциал, показали, что канторовский спектр могут иметь п. п. потенциалы с любым наперед заданным модулем частот, не изоморфным $\mathbf{Z}$ (модуль частот, изоморфный $\mathbf{Z}$, соответствует периодическому случаю).

Я. Г. Синай [331] методами КАМ-теории рассмотрел разностный одномерный оператор Шрёдингера $H_g=-\Delta+gV(z)$ с п. п. потенциалом $V(z)=\cos 2\pi(\omega z+\alpha)$, $z\in\mathbf{Z}$. Такой оператор часто называют *оператором Харпера*. Он возникает при изучении оператора Шрёдингера с постоянным магнитным полем и с периодическим электрическим полем методами теории возмущений. В [331] предполагается, что константа связи g достаточно мала, а число ω достаточно типично, т. е. плохо приближается рациональными числами (эти условия на ω, выполненные для п. в. ω, явно формулируются через разложения ω в цепную дробь). Вместо $\cos 2\pi x$ может стоять также любая морсовская 1-периодическая C^2-функция на $\mathbf{R}$, имеющая на $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ровно две невырожденные критические точки. При этом доказано, что спектр оператора H_g чисто точечный, а собственные функции экспоненциально убывают (это один из примеров так называемой *локализации Андерсона*, о которой будет подробнее сказано в § 19).

Похожий разностный оператор

$$P_0=\cos hD_x+\cos x,$$

рассматриваемый в $L_2(\mathbf{R})$, разлагается в прямой интеграл операторов H_g описанного вида (интеграл берется по α). Его спектр и спектры аналогичных операторов с вейлевскими символами $p(x, h\xi)$, где функция $p=p(x, \eta)$ является 2π-периодической по переменным x и ξ, детально изучались Хельфером и Шёстрандом (см., например, [248], [249] и имеющиеся там ссылки), использовавшим технику микролокального анализа для изучения туннельного эффекта между различными колодцами потенциала. В частности, они доказали, что если P — подходящее аналитическое возмущение оператора P_0 и $h/2\pi$ имеет разложение в цепную дробь

$$h/2\pi=1/(q_1+1/(q_2+1/(q_3+\ldots))),\quad q_j\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant j<\infty,$$

где $|q_j|\geqslant c_0$, c_0 достаточно велико, $|h|<2/c_0$, то спектр оператора P есть канторовское совершенное множество лебеговой меры 0.

Из других качественных результатов о спектре отметим следующую теорему, дающую достаточное условие отсутствия точечного спектра.

Теорема 18.6 (А. Я. Гордон [51]). *Пусть потенциал q таков, что существует последовательность периодических потенциалов q_m с периодами $T_m\to\infty$, для которой*

$$\sup_{x\in[-2T_m, 2T_m]}|q(x)-q_m(x)|\leqslant cm^{-T_m}.$$

Тогда если ψ — решение уравнения $A\psi=\lambda\psi$ (здесь $A=-d^2/dx^2+q(x)$), то

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\,[|\psi'(x)|^2+|\psi(x)|^2]/[|\psi'(0)|^2+|\psi(0)|^2]\geqslant 1/4.$$

В частности, в условиях этой теоремы оператор A не имеет точечного спектра, поскольку если $\psi\in L_2(\mathbf{R})$ является решением уравнения $A\psi=\lambda\psi$, то можно доказать, что $\psi(x)\to 0$ и $\psi'(x)\to 0$ при $|x|\to+\infty$.

С другой стороны, А. Я. Гордон [51] доказал также, что для любого набора вещественных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, линейно независимых над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, существует такая квазипериодическая функция q вида (18.10), что точечный спектр оператора $A=-d^2/dx^2+q$ непуст (и, более того, при некотором λ существует такая собственная функция ψ, что $|\psi(x)| \leqslant C \exp(-|x|^{1/2})$.

18.4. Плотность состояний операторов с почти-периодическими коэффициентами. Пусть $A = a(x, D_x)$ — равномерно эллиптический самосопряженный оператор порядка m в $\mathbf{R}^n$ (отсюда следует, что m четно) с коэффициентами из $CAP^\infty(\mathbf{R}^n)$. Будем всегда предполагать, что его главный символ $a_m = a_m(x, \xi)$ положителен (при $\xi \neq 0$) и, следовательно, оператор A полуограничен снизу. Для таких операторов определена проинтегрированная плотность состояний — функция распределения $N(\lambda)$, определяемая с помощью предельного перехода

$$N(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} (\operatorname{mes} V_k)^{-1} N_{V_k}(\lambda), \tag{18.11}$$

где V_k — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $\operatorname{mes} V_k$ — ее мера Лебега $N_{V_k}(\lambda)$ — обычная функция распределения дискретного спектра для оператора A в области V_k с какими-то самосопряженными граничными условиями

$$B_j u|_{\partial V_k} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m/2, \tag{18.12}$$

удовлетворяющими по отношению к оператору $A - \lambda I$ условию эллиптичности с параметром (см., например, М. С. Агранович, М. И. Вишик [3]) равномерно по k (при любом A годятся, например, условия Дирихле). Для простоты будем считать, что либо V_k имеет гладкую границу либо A имеет периодические коэффициенты, V_k — параллелепипед, составленный из элементарных ячеек решетки периодов, и граничные условия суть условия периодичности (с решеткой периодов, для которой V_k является элементарной ячейкой). Предположим далее, что при $k \to +\infty$ области раздуваются достаточно регулярным образом, например, гомотетично. При описанных условиях предел (18.11) существует при всех λ, кроме, быть может, счетного множества (точнее, он может не существовать лишь в точках разрыва предельной функции $N(\lambda)$, которая является неубывающей функцией и доопределяется в точках ее разрыва по непрерывности справа), причем он не зависит от выбора последовательности областей V_k и граничных условий (18.12) (М. А. Шубин [163]). Таким образом, $N(\lambda)$ зависит только от оператора A.

Для доказательства существования предела в (18.11) можно, например, воспользоваться теоремами выбора Хелли (см., например, [157]), из которых получается, что достаточно, во-первых, доказать существование такого λ_0, не зависящего от k, что $\lambda_0 < \inf \sigma(A_k)$, где A_k — самосопряженный оператор в $L_2(V_k)$, определяемый выражением A и граничными условиями (18.12) (его область определения состоит из всех функций $u \in H^m(V_k)$, удовлетворяющих граничным условиям), во-вторых, дать равномерную по k оценку сверху всех функций $N_k(\lambda) = (\operatorname{mes} V_k)^{-1} N_{V_k}(\lambda)$ величиной $C(1+|\lambda|)^N$ и, в-третьих, доказать существование предела преобразований Лапласа $\tilde{N}_k(t)$ при $k\to\infty$. Здесь *преобразование Лапласа* какой-либо функции распределения $N(\lambda)$ определяется формулой

$$\tilde{N}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}dN(\lambda), \quad t>0. \tag{18.13}$$

Тогда

$$\tilde{N}_k(t)=(\operatorname{mes} V_k)^{-1}\operatorname{Tr}(e^{-tA_k})=(\operatorname{mes} V_k)^{-1}\int_{V_k} G_k(t, x, x)\,dx,$$

где G_k — ядро оператора e^{-tA_k} или, что то же самое, функция Грина параболического оператора $\partial/\partial t - A$ в области $[0, +\infty)\times V_k$ с граничными условиями (18.12). Сравнивая функцию Грина G_k с фундаментальным решением задачи Коши $G=G(t, x, y)$ с помощью результатов С. Д. Эйдельмана и С. Д. Ивасишена [166], легко получить существование предела $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{N}_k(t)$, равного

$$\tilde{N}(t)=M_x\{G(t, x, x)\} \tag{18.14}$$

(правая часть имеет смысл, поскольку анализируя построение фундаментального решения методом Леви, можно доказать, что $G(t, x+z, y+z)\in CAP(\mathbf{R}^n_z)$ для любых $t>0$, x, $y\in\mathbf{R}^n$; в частности, $G(t, x, x)\in CAP(\mathbf{R}^n_x)$). Из формулы (18.14), в частности, видна независимость $N(\lambda)$ от выбора последовательности V_k и граничных условий.

Вместо экспоненты e^{-tA} и преобразования Лапласа в этом рассуждении можно было бы использовать резольвенту $(A-tI)^{-1}$ и преобразование Стильтьеса.

Аналогично можно доказать существование других пределов, например:

$$F_L(\lambda)=\lim_{k\to\infty}(\operatorname{mes} V_k)^{-1}\sum_{\lambda_l<\lambda}(L\psi_l, \psi_l),$$

где $\{\psi_l, l=1, 2, \ldots,\}$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора A_k, λ_l — соответствующие собственные значения, L — любой дифференциальный оператор с п.п. коэффициентами (при $L=I$ мы получаем $F_L(\lambda)=N(\lambda)$), а скалярное произведение берется в $L_2(V_k)$. Другой пример:

$$F_{f,g}(\lambda)=\lim_{k\to\infty}(\operatorname{mes} V_k)^{-1}\sum_{\lambda_l<\lambda}(f, \psi_l)(\psi_l, g),$$

где $f, g\in CAP(\mathbf{R}^n)$ (этот пример отвечает одномерному оператору L для рассмотренной выше функции F_L). Если даны два оператора A', A'' описанного выше типа, ψ'_l, ψ''_l — их собственные функции, λ'_l, λ''_l — соответствующие собственные значения, L', L'' — дифференциальные операторы с п. п. коэффициентами, то предел

$$F_{L',L''}(\lambda, \mu) = \lim_{k\to+\infty} (\operatorname{mes}(V_k))^{-1} \sum_{\substack{\lambda'_l<\lambda \\ \lambda''_r<\mu}} (L'\psi'_l, \psi''_r)(L''\psi''_r, \psi'_l)$$

существует в смысле слабой сходимости соответствующих мер на (λ, μ)-плоскости. При $A' = A'' = A$, $L' = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $L'' = \frac{\partial}{\partial x_j}$ отсюда получается величина $S^{ij}(\lambda, \mu)$, которая имеет физический смысл тензора проводимости. С помощью рассмотрения обратных функций можно доказать существование *энергии Ферми*:

$$E^F(\rho) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ p/\operatorname{mes}V_k\to\rho}} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p}{p}, \quad \rho > 0,$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A_k, упорядоченные по возрастанию с учетом кратности (М. А. Шубин [165]).

18.5. Интерпретация плотности состояний с помощью алгебр фон Неймана и ее свойства. С помощью теории алгебр фон Неймана (см., напр., [218]) проинтегрированную плотность состояний $N(\lambda)$ самосопряженного п. п. оператора оказывается возможным интерпретировать так же, как обычную функцию распределения дискретного спектра, но с использованием обобщенной размерности и обобщенного следа. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^n_B \times \mathbf{R}^n) = B^2(\mathbf{R}^n) \otimes L_2(\mathbf{R}^n)$, обозначим через e_λ оператор умножения на функцию $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}(\lambda \in \mathbf{R}^n)$ в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и в $B^2(\mathbf{R}^n)$, через T_λ — оператор сдвига на λ, т. е. $T_\lambda u(x) = u(x-\lambda)$, и пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$, полученная слабым замыканием алгебры, натянутой на множество операторов

$$\{e_\lambda \otimes e_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}^n\} \cup \{I \otimes T_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}^n\}. \qquad (18.15)$$

Можно доказать, что для ограниченного линейного оператора A в $\mathscr{H}$ включение $A \in \mathfrak{A}$ равносильно тому, что оператор перестановочен со всеми операторами из множества

$$\{T_{-\lambda} \otimes T_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}^n\} \cup \{e_\lambda \otimes I, \lambda \in \mathbf{R}^n\}. \qquad (18.16)$$

О неограниченном операторе A в $\mathscr{H}$ говорят, что он *присоединен* к $\mathfrak{A}$ обозначение: $A\eta\mathfrak{A}$), если он перестановочен со всеми операторами из множества (18.16); для самосопряженного оператора это равносильно тому, что $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathfrak{A}$ при всех $\lambda \notin \sigma(A)$ или при одном таком λ или что $E_\lambda \in \mathfrak{A}$ для всех спектральных проекторов E_λ оператора A.

Алгебра $\mathfrak{A}$ впервые использована в теории п.п. операторов в работе Кобурна, Мойера и Зингера [201] для построения теории индекса п.п. операторов. Она получена частным случаем общей конструкции Мюррея и фон Неймана [300], применимой к любой динамической системе. Основной нужный нам факт состоит в том, что $\mathfrak{A}$ является II_∞-*фактором*. Это означает, что на множестве $\mathfrak{A}^+=\{A : A\in\mathfrak{A},\ A\geqslant 0\}$ имеется единственный с точностью до скалярного множителя *точный нормальный полуконечный след* $\mathrm{Tr}_B : \mathfrak{A}^+\to[0, +\infty]$, который на множестве $\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})=\{P : P\in\mathfrak{A},\ P^2=P=P^*\}$, состоящем из всех ортогональных проекторов, принадлежащих $\mathfrak{A}$, принимает все значения из $[0, +\infty]$. Напомним (см. [218]), что этот след, по определению, обладает следующими свойствами:

a) $\mathrm{Tr}_B(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)=\lambda_1\mathrm{Tr}_BA_1+\lambda_2\mathrm{Tr}_BA_2$, $A_j\in\mathfrak{A}^+$, $\lambda_j\geqslant 0$;

b) $\mathrm{Tr}_B(A^*A)=\mathrm{Tr}_B(AA^*)$ для любого $A\in\mathfrak{A}$;

c) $A\in\mathfrak{A}^+$, $\mathrm{Tr}_BA=0\Rightarrow A=0$ (*точность*)

d) если $A_\gamma\in\mathfrak{A}^+$ и $A_\gamma\nearrow A$ (т. е. A_γ — монотонное направленное множество операторов из $\mathfrak{A}^+$ сильно сходящихся к A), то $\mathrm{Tr}_BA_\gamma\to\mathrm{Tr}_BA$ (*нормальность*);

e) для любого $A\in\mathfrak{A}^+$ имеем $\mathrm{Tr}_B\,A=\sup\limits_{\substack{C\in\mathfrak{A}^+\\ C\leqslant A\\ \mathrm{Tr}_BC<+\infty}}\mathrm{Tr}_BC$ (*полуконечность*). Чтобы фиксировать нормировку следа, зададим его на операторах вида $I\otimes a(D)$, где $a\in L_\infty(\mathbf{R}^n)$, $a\geqslant 0$, формулой

$$\mathrm{Tr}_B\,(I\otimes a\,(D))=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}a\,(\xi)\,d\xi \tag{18.17}$$

(можно показать, что это возможно). Теперь след Tr_B уже однозначно определен.

По линейности след Tr_B распространяется на идеал $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$, состоящий из таких $A\in\mathfrak{A}$, что $\mathrm{Tr}_B|A|<+\infty$. След Tr_BP для проектора $P\in\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$ можно рассматривать как обобщенную размерность $\dim_B(P\mathscr{H})$ подпространства $P\mathscr{H}$; из перечисленных свойств следа вытекает, что она обладает теми же свойствами, что и обычная размерность с той лишь разницей, что она определена не на всех подпространствах $L\subset\mathscr{H}$, а лишь на тех, для которых соответствующий ортопроектор P_L принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. Таким образом, $\dim_BL=\mathrm{Tr}_BP_L$.

Пусть теперь A — самосопряженный эллиптический п. п. оператор в $\mathbf{R}^n$. Введем в $\mathscr{H}$ оператор $A^\#$ по формуле

$$A^\# u\,(x,\ y)=a\,(x+y,\ D_y)\,u\,(x,\ y)$$

(элементы пространства $\mathscr{H}$ суть классы функций $u=u\,(x,\ y)$ двух переменных $x\in\mathbf{R}^n_B$ и $y\in\mathbf{R}^n$, причем сдвиг $a\,(x+y,\ D_y)$ понимается в смысле продолжения по непрерывности коэффициентов оператора A на $\mathbf{R}_B^n$). Таким образом, $A^\#$ есть прямой интеграл всевозможных операторов $A_x = a(x+y, D_y)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbf{R}_B^n$, представляющих собой эллиптические п. п. операторы в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Легко видеть, что $\sigma(A_x) = \sigma(A)$ при любом $x \in \mathbf{R}_B^n$, откуда $\sigma(A^\#) = \sigma(A)$.

Пользуясь инвариантностью следа (т. е. свойством $\mathrm{Tr}_B(V^{-1}AV) = \mathrm{Tr}_B A$ для любого $A \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{A})$ и обратимого $V \in \mathfrak{A}$), можно получить явную формулу следа для многих важных классов операторов. А именно, пусть дан оператор A в $L_2(\mathbf{R}^n)$ с таким ядром $K_A = K_A(x, y)$, что $K_A(x+z, y+z)$ является непрерывной функцией от x, y со значениями в $CAP(\mathbf{R}_z^n)$, причем

$$|K_A(x, y)| \leqslant C(1+|x-y|)^{-N}$$

при некотором $N > n$ (в частности, таким свойством обладают п. п. псевдодифференциальные операторы порядка $m < -n$). Введем оператор $A^\#$ по формуле

$$A^\# u(x, y) = \int K_A(x+y, x+t) u(x, t)\, dt$$

(это прямой интеграл операторов $A_x = T_{-x} A T_x$, как и в случае дифференциального оператора A). Поскольку $(I \otimes T_{-x}) A^\# (I \otimes T_x) = (A_x)^\#$, то $\mathrm{Tr}_B (A_x)^\# = \mathrm{Tr}_B A^\#$. Беря среднее значение по x, мы получим, что $\mathrm{Tr}_B A^\# = \mathrm{Tr}_B A_{cp}^\#$, где $A_{cp} = M_x\{A_x\}$ — оператор с ядром $K_{A_{cp}}(y, t) = M_x\{K_A(x+y, x+t)\}$, зависящим лишь от $y-t$, так что это оператор свертки и тем самым $A_{cp}^\#$ имеет вид $I \otimes a(D)$. Пользуясь формулой (18.17), легко теперь показать, что

$$\mathrm{Tr}_B A^\# = M_x\{K_A(x, x)\}. \tag{18.18}$$

Для псевдодифференциального п. п. оператора $A = a(x, D_x)$ порядка $m < -n$ это дает

$$\mathrm{Tr}_B A^\# = (2\pi)^{-n} \int M_x\{a(x, \xi)\}\, d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}_B^n \times \mathbf{R}^n} a(x, \xi)\, d\mu_n(x)\, d\xi, \tag{18.19}$$

где $d\mu_n(x)$ — мера Хаара на $\mathbf{R}_B^n$.

Пусть теперь $\{\widetilde{E}_\lambda\}$ — семейство спектральных проекторов оператора $A^\#$. Отметим, что, вообще говоря, $\widetilde{E}_\lambda \neq (E_\lambda)^\#$ для спектральных проекторов E_λ оператора A, более того $(E_\lambda)^\#$ может не иметь смысла, однако, ясно, что $\widetilde{E}_\lambda \in \mathfrak{A}$, ввиду слабой замкнутости алгебры $\mathfrak{A}$. Оказывается (М. А. Шубин [163]), что

$$N(\lambda) = \mathrm{Tr}_B \widetilde{E}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{18.20}$$

Для доказательства достаточно перейти к преобразованию Лапласа и воспользоваться формулами (18.14) и (18.18), а также тем, что $(e^{-tA})^* = e^{-tA^*}$. Из (18.20), в частности, следует, что спектр $\sigma(A)$ есть множество точек роста функции $N(\lambda)$.

С помощью следа Tr_B в случае положительного эллиптического п. п. оператора A (т. е. в случае, когда $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$) можно определить *ζ-функцию*

$$\zeta_A(z) = \mathrm{Tr}_B(A^z)^*. \tag{18.21}$$

Используя теорию комплексных степеней эллиптических операторов (см. [65, п. 1.7]), можно показать, что правая часть определена и конечна при $\mathrm{Re}\, z < -n/m$ (здесь m — порядок оператора A) и имеет место аналог теоремы Сили о мероморфном продолжении ζ-функции: ζ_A мероморфно продолжается во всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ с возможными простыми полюсами лишь в точках $z_j = \frac{j-n}{m}$, $j=0, 1, 2, \ldots$ (исключая точки $z = 0, 1, 2, \ldots$, где полюсов нет), причем вычеты полюсов и значения в точках $0, 1, 2, \ldots$ выражаются через символ оператора A по обычным формулам, но с заменой интегрирования по x на взятие среднего значения (М. А. Шубин [161]). В частности, отсюда, по тауберовой теореме Икехара, получается асимптотика $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$

$$N(\lambda) = N_0(\lambda)(1+o(1)),$$

$$N_0(\lambda) = (2\pi)^{-n} M_x\{\mathrm{mes}\{\xi : a_m(x, \xi) < \lambda\}\}, \tag{18.22}$$

в которой mes означает меру Лебега в $\mathbf{R}_\xi^n$. Методом гиперболического уравнения здесь можно усилить оценку остатка до оценки Хёрмандера (В. Ю. Киселев [74]), заменив $o(1)$ на $O(\lambda^{-1/m})$. В случае же оператора Шрёдингера $A = -\Delta + q(x)$ с потенциалом $q \in CAP(\mathbf{R}^n)$ возможна еще лучшая асимптотика (М. А. Шубин [165])

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} v_n \lambda^{n/2}(1+O(\lambda^{-1})) \tag{18.23}$$

(здесь v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$), которая получается, если в неравенствах

$$N_V^0(\lambda - M) \leqslant N_V(\lambda) \leqslant N_V^0(\lambda + M)$$

(здесь $M = \sup_x |q(x)|$, N_V, N_V^0 — функции распределения дискретного спектра операторов A и $A_0 = -\Delta$ в области $V \subset \mathbf{R}^n$) с $V = V_k$ перейти к пределу при $k \to +\infty$ после деления на mes V_k, а затем воспользоваться формулой (17.33), задающей $N(\lambda)$ для оператора A_0.

Для одномерного оператора Шрёдингера $A = -d^2/dx^2 + q$ (x с потенциалом $q \in CAP^\infty(\mathbf{R})$ А. В. Савин [138] получил полное асимптотическое разложение для $N(\lambda)$ вида (17.25) с коэффициентами, получаемыми из потенциала q по тем же формулам, но с заменой $\frac{1}{a}\int\limits_0^a f(x)\,dx$ на $M_x\{f(x)\}$. Отметим кстати, что число вращения $w(\lambda)$ одномерного оператора Шрёдингера с п. п. потенциалом также может быть определено формулой (17.13) и связано с $N(\lambda)$ той же формулой (17.19), что и в периодическом случае (Джонсон, Мозер [263]).

Для $N(\lambda)$ имеется вариационный принцип, аналогичный обычной лемме Глазмана (ср. п. 1.11)

$$N(\lambda)=\sup_{\substack{P\in\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})\\ P(A^{\#}-\lambda I)P\leqslant 0}} \mathrm{Tr}_B P. \tag{18.24}$$

Его можно обычным образом использовать для изучения $N(\lambda)$ и, в частности, для получения асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$. Например, с его помощью В. И. Безяев [11], используя подходящую модификацию метода приближенного спектрального проектора (см. § 15), нашел асимптотику $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ с оценкой остаточного члена для гипоэллиптических п. п. операторов (в этом случае $N(\lambda)$ определяется по формуле (18.20)).

В некоторых случаях можно находить асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda\to\lambda_0=\inf\sigma(A)$, а также асимптотики $N_V(\lambda)$ при одновременном раздувании V и при $\lambda\to+\infty$ с разными скоростями (асимптотика $N(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ становится тогда частным случаем, когда диаметр области V увеличивается намного быстрее λ). Такие асимптотики связаны с задачами усреднения и изучались С. М. Козловым [77], рассматривавшим равномерно эллиптический оператор дивергентного вида (порядка $2m$)

$$A=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^{\alpha}a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta} \tag{18.25}$$

с коэффициентами $a_{\alpha\beta}=\bar{a}_{\beta\alpha}\in CAP(\mathbf{R}^n)$ и с краевыми условиями Дирихле. Пусть V — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей, $V_l=lV$, $\lambda_j^{(l)}$ — собственные значения оператора A в области V_l с граничными условиями Дирихле, $N_l(\lambda)=\#\{j:\lambda_j^{(l)}\leqslant\lambda\}\times\times(\mathrm{mes}\,V_l)^{-1}$. Мы уже знаем, что $N_l(\lambda)\to N(\lambda)$ при $l\to+\infty$. Положим теперь

$$N_l(\rho,\delta;\lambda)=l^{\delta}N_l(l^{\rho}\lambda),$$

и рассмотрим пределы этой функции при $l\to+\infty$ и при различных ρ (число δ подбирается по ρ так, чтобы предел был конечным и ненулевым). Оказывается, во-первых, что

$$\lim_{l\to+\infty} l^{-n\rho/2m}N_l(l^{\rho}\lambda)=N_0(\lambda)\quad \text{при}\quad \rho>0, \tag{18.26}$$

где $N_0(\lambda)$ определяется по главному символу (порядка $2m$) как в (18.22). При $\rho<0$ надо дополнительно предполагать, что оператор A не имеет младших членов (т. е. $a_{\alpha\beta}=0$ при $|\alpha|+|\beta|<2m$) и строго положителен в том смысле, что

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\bar{\lambda}_\beta \geqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} |\lambda_\alpha|^{2m}, \tag{18.27}$$

при некотором $\varepsilon>0$ для любого набора чисел $\{\lambda_\alpha : |\alpha|\leqslant m\}$. Тогда оказывается, что

$$\lim_{l\to\infty} N_l(\rho, \delta; \lambda)=0 \quad \text{при} \quad \rho<-2m \text{ и любом } \delta; \tag{18.28}$$

$$\lim_{l=\infty} N_l(-2m, n; \lambda)=\hat{N}_V(\lambda), \tag{18.29}$$

где $\hat{N}_V$ — функция распределения собственных значений задачи Дирихле в области V для некоторого специального оператора $\hat{A}=\hat{a}(D)$ с постоянными коэффициентами, называемого *усредненным оператором*. Положим еще

$$\hat{N}(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{\xi : \hat{a}(\xi)\leqslant\lambda\}.$$

Тогда для предельной функции $N(\lambda)$ верна (снова при условии (18.27) и при отсутствии младших членов) следующая асимптотика:

$$N(\lambda)=\hat{N}(\lambda)+o(\lambda^{n/2m}), \quad \lambda\to+0. \tag{18.30}$$

Наконец, если $m=1$ и младшие члены отсутствуют (в этом случае (18.27) — следствие равномерной эллиптичности), то

$$\lim_{l\to\infty} N_l(\rho, -\rho n/2; \lambda)=\hat{N}(\lambda), \quad -2<\rho<0. \tag{18.31}$$

Отметим еще, что в условиях теоремы 18.2 для оператора Шрёдингера $A=-\Delta+q(x)$ (с достаточно малым гладким квазипериодическим потенциалом при выполнении диофантова условия на частоты) все описанные только что асимптотики (18.26), (18.28)—(18.31) будут верны, если заменить A на $A-\lambda_0 I$, где $\lambda_0=\inf\sigma(A)$ поскольку, в силу теоремы 18.2, оператор A приводится к нужному дивергентному виду.

Остановимся дополнительно на свойствах $N(\lambda)$ для одномерного оператора Шрёдингера. Прежде всего, легко видеть, что в этом случае $N(\lambda)$ непрерывна: наличие разрыва в точке λ_0 означало бы, что $\lambda_0\in\sigma_p(\tilde{A})$ для п. в. $\tilde{A}\in H(A)$, а это, как мы уже упоминали, невозможно (отметим, что в периодическом случае $N(\lambda)$ даже гёльдерова с показателем 1/2 (Аврон, Саймон [177]).

Теорема 18.8 (Джонсон, Мозер [263]). *Если $A=-d^2/dx^2+q$, где $q\in CAP(\mathbf{R})$ и $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\sigma(A)$, то $N(\lambda)\in\Omega_q$, где Ω_q — модуль частот потенциала q.*

Важность этой теоремы состоит в том, что она позволяет нумеровать лакуны спектра (который может быть канторовским!) с помощью элементов модуля частот. Эллиотт [224] предложил другое доказательство, основанное на теории C^*-алгебр.

Наконец, интересна связь $N(\lambda)$ с *показателем Ляпунова* $\gamma(\lambda)$, определяемым для каждого из операторов $A \in H(A)$ формулой

$$\gamma(\lambda) = \lim_{L\to\infty} |L|^{-1} \ln \|T_L\|, \tag{18.32}$$

где T_L — линейный оператор в $\mathbf{R}^2$, переводящий пару $(\psi(0), \psi'(0))$ в пару $(\psi(L), \psi'(L))$, где ψ — решение уравнения $\tilde{A}\psi = \lambda\psi$. Предел в (18.32) для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbf{R}$ существует при п. в. $\tilde{A} \in H(A)$ и не зависит от $\tilde{A}$ (это следует из мультипликативной эргодической теоремы В. И. Оселедца [124]). Легко видеть, что $\gamma(\lambda) \geqslant 0$, поскольку $\det T_L = 1$. Кроме того, если $\lambda \notin \sigma(A)$, то $\gamma(\lambda) > 0$, потому что в этом случае $\lambda \notin \sigma(A)$ при любом $\tilde{A} \in H(A)$ и уравнение $\tilde{A}\psi = \lambda\psi$ имеет экспоненциально растущее решение. Однако может случиться, что $\gamma(\lambda) > 0$ и в точке $\lambda \in \sigma(A)$. Это значит, что для п. в. $\tilde{A} \in H(A)$ каждое решение ψ уравнения $\tilde{A}\psi = \lambda\psi$ либо экспоненциально растет, либо экспоненциально убывает при $x \to +\infty$ (то же самое верно при $x \to -\infty$). Поэтому естественно ожидать, что множество $\sigma(A) \cap \{\lambda : \gamma(\lambda) > 0\}$ должно состоять из точечного и сингулярного непрерывного спектра. Это оказывается действительно так с точностью до множества меры 0: если $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$ и мы рассмотрим абсолютно непрерывную спектральную меру $d(E_\gamma\psi, \psi)$, то множество $\{\lambda : \gamma(\lambda) > 0\}$ имеет относительно нее меру 0 (Л. А. Пастур [128], Ишии [258]). Котани [273] существенно уточнил этот результат, показав, что множество $\{\lambda : \gamma(\lambda) = 0\}$ является существенным носителем абсолютно непрерывного спектра $\sigma_{ac}(A)$, т. е. совпадает с ним с точностью до множества лебеговой меры 0.

Связь $N(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ дается формулой Таулеса [344] (доказательство см. Аврон, Саймон [178]).

$$\gamma(\lambda) = \gamma_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \ln|\lambda - \lambda'|\, d[N(\lambda') - N_0(\lambda')], \tag{18.33}$$

где $\gamma^{(0)}(\lambda) = [\max(0, -\lambda)]^{1/2}$, $N_0(\lambda) = \pi^{-1}[\max(0, \lambda)]^{1/2}$ соответствуют случаю $q = 0$. Формула (18.33) верна при п. в. λ (по мере Лебега на $\mathbf{R}$), причем интеграл в ней нужно понимать в смысле главного значения. Заметим, что если ввести функцию

$$f(z) = \sqrt{-z} + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(z - \lambda')\, d[N(\lambda') - N_0(\lambda')],$$

аналитическую в комплексной полуплоскости $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, то $\operatorname{Im} f(z)$ имеет на вещественной оси граничное значение $\operatorname{Im} f(\lambda +$

$+i0)=\pi N(\lambda)$, а, в силу формулы (18.33), $\operatorname{Re} f(\lambda+i0)=\gamma(\lambda)$. Таким образом, функция $\gamma(\lambda)+i\pi N(\lambda)$ является граничным значением аналитической функции, заданной в верхней полуплоскости, так что в основном $\pi N(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ получаются друг из друга преобразованием Гильберта. Причину этого, следуя обзору Саймона [323], можно пояснить, заметив, что если $\psi(x)\sim e^{i\alpha x}$ на бесконечности, то показатель Ляпунова $\gamma(\lambda)$ связан с $\operatorname{Im}\alpha$, а число вращения, пропорциональное $N(\lambda)$, связано с $\operatorname{Re}\alpha$.

Укажем еще справедливое для одномерного оператора Шрёдингера неравенство Дейфта и Саймона [214]:

$$\frac{d\,[N^2(\lambda)]}{d\lambda}\geqslant\frac{1}{\pi^2} \text{ для п. в. } \lambda, \text{ для которых } \gamma(\lambda)=0, \tag{18.34}$$

где производная $df/d\lambda$ для любой монотонной функции $f=f(\lambda)$ понимается как предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(2\varepsilon)^{-1}[f(\lambda+\varepsilon)-f(\lambda-\varepsilon)]$, существующий при п. в. λ. Отметим, что для нулевого потенциала в (18.34) имеется точное равенство. Из (18.34) следует, в частности, что если $M=\{\lambda:\gamma(\lambda)=0\}$, то для любого интервала $(a, b)\subset\mathbf{R}$

$$N^2(b)-N^2(a)\geqslant\pi^{-2}\operatorname{mes}[M\cap(a, b)].$$

При $\operatorname{Im}\lambda\geqslant0$ верно неравенство Котани [273]

$$4\pi w(\lambda)\gamma(\lambda)\geqslant\operatorname{Im}\lambda, \tag{18.35}$$

где $w(\lambda)$ — число вращения.

По поводу других аспектов спектральной теории эллиптических п. п. операторов см. также обзоры М. А. Шубина [165], Саймона [323], Джонсона [262], Л. А. Пастура [305] и книгу [213].

§ 19. Операторы со случайными коэффициентами

Операторам со случайными коэффициентами посвящено огромное количество работ, в том числе большие обзоры [127], [130], [195], [196], [269], [282], [305], [334], [335], а также две главы книги [213]. В этом параграфе мы не пытаемся дать полный обзор всех результатов этой области, а ограничиваемся лишь наиболее характерными и главным образом многомерными, отсылая читателя за дальнейшими подробностями к указанным обзорам и цитированной в них литературе.

19.1. Трансляционно однородные случайные поля. Поясним кратко физический контекст возникновения случайных полей и операторов (см. [100], [355]). Случайные функции, поля или операторы возникают из желания описать поведение соответствующих объектов, которые точно не известны, но у которых можно ожидать наличия статистически устойчивого поведения. Типичным примером является шероховатая поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$, которая может быть записана в виде графика $y=f(x)$, где $x \in \mathbf{R}^n$. Не зная в точности вида функции f, мы можем однако предположить, что f зависит от какого-либо случайного параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — *вероятностное пространство* (множество с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ его подмножеств и вероятностной мерой μ на $\mathcal{F}$); таким образом, $f=f(\omega, x)$. Пока у функции f еще не может появиться никаких дополнительных свойств по сравнению с неслучайной ситуацией, поскольку в частности можно взять Ω состоящим из одной точки. Однако наложим теперь следующее предположение *трансляционной однородности*: будем считать, что все вероятностные характеристики поверхности не меняются при сдвиге вдоль x-плоскости. Если мы рассматриваем большой кусок поверхности, а шероховатости малы, то это предположение естественно. Математически оно означает, что при любых $\omega \in \Omega$, $z \in \mathbf{R}^n$ сдвинутая функция $x \mapsto f(\omega, x+z)$ также содержится в том же самом семействе f, но уже при другом значении случайного параметра ω, которое мы обозначим $T_z\omega$, причем преобразование $T_z: \Omega \to \Omega$ сохраняет заданную вероятностную меру μ (последнее и есть как раз сохранение вероятностных характеристик: мера какого-то множества случайных функций f должна совпадать с мерой множества, получаемого, если все эти функции сдвинуть на z).

Заметим, что сдвиги по z на функциях образуют группу, изоморфную $\mathbf{R}^n$; естественно потребовать, чтобы преобразования T_z обладали тем же групповым свойством. Это автоматически будет выполнено, если «меток» ω столько же, сколько функций $f(\omega, \cdot)$, т. е. если разным ω соответствуют разные функции на $\mathbf{R}^n$. Вообще часто предполагают, что вероятностная мера задана прямо в пространстве функций, т. е. Ω — подмножество пространства функций на $\mathbf{R}^n$, однако для наших целей это неудобно, поскольку приводит к необходимости все время менять Ω (например, при переходе от f к $f+1$ или f^2). Наконец, f можно считать вектор-функцией (со значениями в $\mathbf{C}^N$).

Эти мотивировки оправдывают

Определение 19.1. *Однородным случайным полем* (со значениями в $\mathbf{C}^N$), называется совокупность следующих объектов

а) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с заданной на нем динамической системой с n-мерным временем $\{T_z, z \in \mathbf{R}^n\}$; здесь $T_z: \Omega \to \Omega$, семейство $\{T_z\}$ *измеримо* в том смысле, что измеримо задаваемое им отображение $\Omega \times \mathbf{R}^n \to \Omega$, переводящее (ω, z) в $T_z\omega$ (на $\mathbf{R}^n$ нужно рассматривать σ-алгебру борелевских множеств) и выполнено групповое свойство: $T_0=\mathrm{id}$, $T_{z+w}=T_zT_w$ для любых $z, w \in \mathbf{R}^n$;

б) измеримая функция $f: \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^N$, для которой

$$f(\omega, x+z)=f(T_z\omega, x) \tag{19.1}$$

для п. в. (почти всех) $\omega\in\Omega$ при всех x, $z\in\mathbf{R}^n$, т. е. при $\omega\in\Omega'$ и при всех x, $z\in\mathbf{R}^n$, где Ω' — измеримое подмножество полной меры в Ω.

Фиксируя $\omega\in\Omega$, мы получаем функцию $f(\omega, \cdot)$ на $\mathbf{R}^n$, которая называется *реализацией* данного случайного поля. Реализации однородного случайного поля уже не могут быть произвольными функциями: они п. н. (почти наверное), т. е. для п. в. ω обладают рядом свойств, вытекающих из однородности. Например, если Ω состоит из одной точки ω_0, то однородность дает $f(\omega_0, x)=\text{const}$. Далее, если предположить, что $f(\cdot, 0)\in L_1(\Omega)$ (это так, например, в случае если f ограничена), то по эргодической теореме Биркгофа (см., например, [81]) при п. в. ω существует среднее

$$\bar{f}(\omega)=M_x\{f(\omega, x)\}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int\limits_{|x_j|\leqslant R/2} f(\omega, x)\,dx, \tag{19.2}$$

аналогичное среднему значению п. п. функции (см. (18.1)). Это среднее, будучи случайной величиной (функцией на Ω), инвариантно относительно сдвигов $\{T_z, z\in\mathbf{R}^n\}$, т. е.

$$\bar{f}(T_z\omega)=\bar{f}(\omega), \tag{19.3}$$

для п. в. ω при всех $z\in\mathbf{R}^n$. Важен и часто встречается случай, когда динамическая система $\{T_z, z\in\mathbf{R}^n\}$ эргодична, т. е. всякая измеримая инвариантная функция на Ω п. в. постоянна, тогда само поле часто называют *эргодическим* или *метрически транзитивным*. В этом случае для п. в. ω

$$\bar{f}(\omega)=\text{const}=\int\limits_{\Omega} f(\omega, 0)\,d\mu(\omega)=\int\limits_{\Omega} f(\omega, x)\,d\mu(\omega), \tag{19.4}$$

(правая часть не зависит от $x\in\mathbf{R}^n$), т. е. $\bar{f}(\omega)$ — математическое ожидание случайной величины $f(\cdot, 0)$. В общем (не эргодическом) случае $\bar{f}(\omega)$ — это условное математическое ожидание случайной величины $f(\cdot, 0)$ относительно σ-алгебры T-инвариантных множеств. Для случая, когда $f(\cdot, 0)\in L_2(\Omega)$ это означает, что $\bar{f}(\cdot)=Pf(\cdot, 0)$, где P — ортогональный проектор $L_2(\Omega)$ на подпространство T-инвариантных функций; эта формула имеет смысл и в общем случае, поскольку проектор P продолжается до линейного непрерывного оператора $P: L_1(\Omega)\to L_1(\Omega)$.

Приведем примеры однородных случайных полей.

Пример 19.1. Пусть Γ — решетка в $\mathbf{R}^n$ (см. § 17) $\Omega=\mathbf{R}^n/\Gamma$ — тор с нормированной лебеговской мерой $d\mu$ (так что $\mu(\Omega)=1$), $\hat{g}$ — измеримая функция на Ω. Положим

$$f(\omega, x)=\hat{g}(\omega+x), \quad \omega\in\Omega, \quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{19.5}$$

где $\omega+x$ понимается в естественном смысле как сумма ω и класса вектора x по модулю Γ. Легко видеть, что f — однородное случайное поле, причем все его реализации суть Γ-периодические функции, которые получаются друг из друга сдвигами.

Пример 19.2. Пусть $g=g(x)$ — квазипериодическая функция на $\mathbf{R}^n$ (см. § 18), получаемая в виде композиции $g=\hat{g}\circ\pi$, где $\pi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{T}^N$ — непрерывный гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ в тор $\mathbf{T}^N=\mathbf{R}^N/\mathbf{Z}^N$, $\hat{g}$ — измеримая функция на $\mathbf{T}^N$. Пусть $\Omega=\mathbf{T}^N$, $d\mu$ — лебегова мера на торе Ω. Формула (19.5) задает теперь однородное случайное поле, если в ней $\omega+x$ понимать как результат сдвига точки ω на x при естественном действии $\mathbf{R}^n$ на Ω, задаваемом отображением π. При этом квазипериодическая функция g является одной из реализаций случайного поля f. Все прочие реализации составляют оболочку $H(g)$ функции g.

Пример 19.3. Пусть $\Omega=\mathbf{R}^n_B$ — компакт Бора пространства $\mathbf{R}^n$ с мерой Хаара $d\mu$ (см. § 18). Имеющееся вложение $\mathbf{R}^n\subset\mathbf{R}^n_B$ задает действие $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n_B$ сдвигами и для любой п. п. функции $g\in CAP(\mathbf{R}^n)=C(\mathbf{R}^n_B)$ мы можем ввести однородное случайное поле f по формуле (19.5). Функция g будет одной из реализаций поля f, все прочие реализации будут принадлежать оболочке функции g.

Таким образом, периодические и почти-периодические функции суть реализации некоторых однородных случайных полей (правда, достаточно частного вида). Приведем другие примеры таких полей.

Пример 19.4. Пусть $\{\xi_z(\omega),\ z\in\mathbf{Z}^n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\omega\in\Omega_0$, где Ω_0 — вероятностное пространство с мерой $d\mu_0$, $\chi=\chi(x)$ — измеримая функция на $\mathbf{R}^n$ с носителем в кубе $[0, 1]^n$. Положим

$$f(\omega, x)=\sum_{z\in\mathbf{Z}^n}\xi_z(\omega)\chi(x-z). \tag{19.6}$$

Пространство Ω_0 можно считать имеющим вид прямого произведения $\Omega_0=\prod_{z\in\mathbf{Z}^n}\Omega_{1z}$ одинаковых вероятностных пространств Ω_1 с мерами $d\mu_1(\omega)$, на каждом из которых задана (одна и та же) случайная величина $\xi_z(\omega_1)$, $\omega_1\in\Omega_1$, причем $\xi_z(\omega)$ получается из $\xi_z(\omega_1)$ подъемом на Ω_0 относительно естественной проекции $\pi_z:\Omega_0\to\Omega_{1z}$. Удобно представлять себе Ω_0 как множество функций на $\mathbf{Z}^n$ со значениями в Ω_1, и в этой интерпретации на Ω_0 имеются естественные сдвиги $T_z:\Omega_0\to\Omega_0$, $z\in\mathbf{Z}^n$, переводящие любую такую функцию $\omega:\mathbf{Z}^n\to\Omega_1$ в функцию $(T_z\omega)(z')=\omega(z'+z)$. Свойство трансляционной инвариантности (19.1) для сдвигов на целочисленные векторы вытекает из одинаковой распределенности случайных величин $\xi_z(\omega)$, что достаточно для большинства приложений (например, для существования среднего (19.2) в случае, когда $\xi_0(\cdot)\in L_1(\Omega_1)$, а функция χ ограничена). Впрочем, при желании можно, по сути дела не меняя данного случайного поля, добиться трансляционной однородности относительно всех сдвигов, применяя операцию надстройки Смейла (см. [4]). А именно, заменим Ω_0 на $\Omega=\Omega_0\times K_1$, где $K_1=\{x=(x_1, \ldots, x_n), \quad 0\leqslant x_j<1, \quad j=1, \ldots, n\}$, — единичный куб с мерой Лебега на нем и, полагая для $\omega=(\omega_0, t)$, $\omega_0\in\Omega_0$, $t\in K_1$,

$$\hat{f}(\omega, x)=\hat{f}((\omega_0, t), x)=f(\omega_0, x+t).$$

Остается для $y\in\mathbf{R}^n$, $y=z+\tau$, $z\in\mathbf{Z}^n$, $\tau\in K_1$, $\omega=(\omega_0, t)$ записав $t+\tau=z_0+t'$, где $z_0\in\mathbf{Z}^n$, $t'\in K_1$, положить $T_y\omega=(T_{z+z_0}\omega_0, t')$, что задает на Ω динамическую систему (с n-мерным временем), относительно которой $\hat{f}$ становится однородным случайным полем.

Замечание 19.1. Пример 19.4 имеет более естественный дискретный вариант. Понятие однородного случайного поля имеет смысл в случае дискретного аргумента $z\in\mathbf{Z}^n$: в определении 19.1 вместо $\mathbf{R}^n$ нужно всюду написать $\mathbf{Z}^n$. В этом случае примером однородного случайного поля будет просто система независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_z(\omega), z\in\mathbf{Z}^n\}$ (надо положить $f(\omega, z)=\xi_z(\omega)$).

Пример 19.5. Пусть $\varphi=\varphi(x)$ — фиксированная ограниченная измеримая финитная функция в $\mathbf{R}^n$. Положим

$$f(\omega, x)=\sum_i \varphi(x-x_i), \tag{19.7}$$

где точки $\{x_i\}$ образуют случайное множество, *распределенное по Пуассону* относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^n$, т. е. вероятность того, что в множество $X\in\mathbf{R}^n$ конечной меры Лебега $\operatorname{mes} X$ попадает N точек, выражается формулой

$$P\{\operatorname{card}(\{x_i\}\cap X)=N\}=e^{-c\operatorname{mes}X}(c\operatorname{mes}X)^N/N!, \tag{19.8}$$

где постоянная c имеет смысл средней концентрации точек x_i (среднее число точек x_i, попавших в X, равно $c\operatorname{mes}X$). Следует также предполагать, что если X, Y — непересекающиеся подмножества в $\mathbf{R}^n$, то распределения точек в X и Y независимы. Легко проверить, что в множествах X и $X+a$ точки $\{x_i\}$ одинаково (в вероятностном смысле) распределены для любого подмножества $X\subset\mathbf{R}^n$ и для любого вектора сдвига $a\in\mathbf{R}^n$. В описанной ситуации поле f вида (19.7) называется *пуассоновски порожденным* или просто *пуассоновским полем* (с потенциалом φ). Заметим, что вообще говоря $f(\omega, x)$ может оказаться не определенным на некотором множестве точек x (и даже при всех x) ввиду того, что сумма в (19.7) бесконечна, однако вероятность такого распределения точек $\{x_i\}$ равна 0, ввиду условия (19.8).

Пример 19.6. При $n=1$ однородные случайные поля называются обычно *стационарными* случайными процессами. Их теория (см., например, [212]) представляет многочисленные примеры одномерных однородных случайных полей. Среди них выделяются *марковские процессы* и их дискретный вариант — *марковские цепи* (см. например, [41]), диффузионные процессы (см. [41], [259]). Важный пример такой ситуации связан с рассмотрением на компактном римановом многообразии M (без края) оператора $A=-\Delta+h$, где Δ — оператор Бельтрами—Лапласа на M, h — векторное поле на M. Пусть $p(t, x, y)$ — ядро оператора $\exp(-tA)$ (фундаментальное решение задачи Коши для параболического оператора $\partial/\partial t-A$ на M). Тогда можно рассматривать $p(t, x, y)$ как плотность вероятности перехода из точки x в точку y за время t для случайного блуждания $Q(\omega, t)$ на M (это марковский диффузионный процесс на M). В силу эргодической теоремы, $p(t, x, y)\to\pi(y)$ при $t\to\infty$. Примем $\pi(y)$ за плотность вероятности начального распределения. Тогда возникает распределение вероятностей на любых траекториях $Q:[0, +\infty)\to M$ и поскольку функция π задает стационарное распределение вероятностей, то получается вероятностная мера на множестве путей $Q:\mathbf{R}\mapsto M$ (т. е. путей $Q(t)$, определенных при всех t). Положим теперь $f(t)=F(Q(t))$, где F — (векторная) функция на M (зависимость от ω подразумевается). Тогда $f(t)=f(\omega, t)$ — стационарный случайный процесс (или однородное случайное поле на $\mathbf{R}^1$), который мы будем называть *диффузионно порожденным*.

Важным объектом, характеризующим однородные случайные поля, являются конечномерные распределения

$$P\{\omega: f(\omega, x_1)\in B_1, \ldots, f(\omega, x_k)\in B_k\}, \qquad (19.9)$$

где $x_1, \ldots, x_k\in\mathbf{R}^n$, $B_1, \ldots, B_k$ — борелевские подмножества в $\mathbf{C}^N$ (мы считаем, что f — поле со значениями в $\mathbf{C}^N$), так что формула (19.9) задает вероятностную меру на $(\mathbf{R}^n)^k$, зависящую от точек $x_1, \ldots, x_k$ как от параметров. Эти меры при различных значениях k в очевидном смысле согласованы между собой и, обратно, при выполнении этого условия согласования известная теорема А. Н. Колмогорова (см., например, [41]) гарантирует существование случайного поля с данными конечномерными распределениями (однородного, если распределения (19.9) не меняются при сдвиге всех точек $x_1, \ldots, x_k$ на один и тот же вектор $\tau\in\mathbf{R}^n$). В терминах конечномерных распределений можно определять различные классы случайных полей. Например, поле называется *гауссовским*, если все меры (19.9) являются гауссовскими мерами на соответствующих евклидовых пространствах, т. е. имеют плотности вида $\exp(-Q(y))$, где Q — положительно определенная квадратичная форма.

19.2. Случайные дифференциальные операторы. Рассмотрим теперь *случайный дифференциальный оператор*

$$A=A_\omega=a(\omega, x, D_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(\omega, x)\, D_x^\alpha, \tag{19.10}$$

коэффициенты которого $\{a_\alpha(\omega, x) : |\alpha|\leqslant m\}$ образуют однородное случайное поле. Мы будем для простоты рассматривать лишь случай, когда либо выполнены оценки

$$|\partial_x^\beta a_\alpha(\omega, x)|\leqslant c_\beta \tag{19.11}$$

для любых мультииндексов α, β с $|\alpha|\leqslant m$ (и постоянной c_β, не зависящей от ω), либо A есть оператор Шрёдингера

$$A=A_\omega=-\Delta+q(\omega, x) \tag{19.12}$$

(в этом случае потенциал q должен представлять собой однородное случайное поле).

Наряду с дифференциальными операторами (19.10) полезно рассматривать *случайные псевдодифференциальные операторы* $A=A_\omega=a(\omega, x, D_x)$ с символами, удовлетворяющими оценкам

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(\omega, x, \xi)|\leqslant c_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \tag{19.13}$$

причем $a(\omega, x, \xi)$ — однородное случайное поле при каждом фиксированном $\xi\in\mathbf{R}^n$. Оператор $A=a(\omega, x, D_x)$ назовем *случайным эллиптическим оператором,* если он эллиптичен равномерно по $\omega\in\Omega$ и $x\in\mathbf{R}^n$ (это автоматически верно для оператора Шрёдингера (19.12)). В эргодическом случае сами операторы (как и поля, образованные их коэффициентами или символами) часто называют *эргодическими* или *метрически транзитивными.*

Будем рассматривать описанные операторы (19.10) или (19.12 как случайные операторы в $L_2(\mathbf{R}^n)$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Чтобы оператор Шрёдингера (19.12) был определен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ при п. в. ω, мы будем здесь и ниже предполагать, что выполнено

$$q(\cdot, 0)\in L_2(\Omega). \tag{19.14}$$

Условие однородности можно записать в операторном виде

$$A_{T_z\omega}=U_z A_\omega U_{-z}, \tag{19.15}$$

где U_z — оператор сдвига на вектор $z\in\mathbf{R}^n$, т. е. $(U_z f)(x)=f(x+z)$, $f\in L_2(\mathbf{R}^n)$, и равенство (19.15) должно выполняться на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ при п. в. $\omega\in\Omega$. Свойство однородности в форме (19.15) переносится на любые функции оператора A, например, на многочлены (с постоянными коэффициентами) от A, резольвенту его замыкания и спектральные проекторы (в случае когда A в существенном самосопряжен). Отметим, что для интегрального оператора B с непрерывным (по x, y) ядром $K_B = K_B(\omega, x, y)$ свойство (19.15) означает, что для п. в. ω при всех $x, y, z \in \mathbf{R}^n$

$$K_B(T_z\omega, x, y) = K_B(\omega, x+z, y+z). \tag{19.16}$$

В частности, ограничение ядра на диагональ $K_B(\omega, x, x)$ — однородное случайное поле и если $K_B(\cdot, 0, 0) \in L_1(\Omega)$, то определен *случайный след*

$$\mathrm{Tr}_R B = M_x\{K_B(\omega, x, x)\}, \tag{19.17}$$

в эргодическом случае не зависящий от ω. В [149] доказано, что он обладает свойствами, аналогичными свойствам обычного следа. А именно, след $\mathrm{Tr}_R B$ линейно зависит от оператора B и $\mathrm{Tr}_R B \geqslant 0$ для неотрицательного оператора B (и в этом случае равенство $\mathrm{Tr}_R B = 0$ имеет место лишь в случае $B=0$). Далее, пусть A, B — два *случайных однородных карлемановских оператора*, т. е. A, B — однородные случайные интегральные операторы с такими ядрами $K = K_A$ или K_B, что

$$\sup_{y,\omega} \int |K(\omega, x, y)|^2 dx < \infty, \quad \sup_{x,\omega} \int |K(\omega, x, y)|^2 dy < \infty. \tag{19.18}$$

Тогда если операторы AB и BA имеют непрерывные по x, y ядра (при п. в. ω), то

$$\mathrm{Tr}_R(AB) = \mathrm{Tr}_R(BA). \tag{19.19}$$

Непрерывность ядер операторов AB и BA имеет место, например, если оценки (19.18) верны для обоих ядер K_A, K_B с заменой K на $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K$ для любых мультииндексов α, β. Формула (19.19) верна также при условии, что лишь оператор B обладает указанными оценками производных, а A — любой случайный однородный псевдодифференциальный оператор (с оценками символа (19.13)), или при условии, что A, B — два случайных однородных псевдодифференциальных оператора таких порядков m_1, m_2, что $m_1 + m_2 < -n$.

Для почти-периодических операторов, представленных как случайные, согласно конструкции, указанной в примере 19.3, след Tr_R превращается в след Tr_B, описанный в § 18.

В дальнейшем мы дополнительно потребуем, чтобы динамическая система $\{T_z, z \in \mathbf{R}^n\}$ задавала в $L_2(\Omega)$ *сильно непрерывную группу унитарных операторов*. Это означает, что если ввести в $L_2(\Omega)$ унитарные операторы V_z по формуле $V_z f(\omega) = f(T_z\omega)$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ вектор-функция $z \mapsto V_z f$ на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $L_2(\Omega)$ непрерывна. Отметим, что это условие достаточно проверять для плотного множества функций f и что, в силу известной теоремы фон Неймана, оно автоматически выполняется в случае, когда пространство $L_2(\Omega)$ сепарабельно ([312, теорема VIII.9]) или когда Ω — компактное топологическое пространство (с борелевской мерой μ), а $\{T_z\}$ — непрерывная группа его гомеоморфизмов. При выполнении указанного условия непрерывности действие случайного однородного дифференциального (или псевдодифференциального) оператора $A=a(\omega, x, D_x)$ можно определить также в пространстве $L_2(\Omega)$, интерпретируемом как пространство однородных случайных полей. А именно, введем пространство $C_b^\infty(\Omega)$, состоящее из таких $u \in L_2(\Omega)$, что при п. в. ω функция $x \mapsto v(\omega, x) = u(T_x\omega)$ имеет ограниченные производные всех порядков, причем $|\partial_x^\alpha u(T_x\omega)| \leqslant c_\alpha$ с неслучайными постоянными c_α для любого мультииндекса α. Можно показать ([59]), что $C_b^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Положим теперь для $u \in C_b^\infty(\Omega)$

$$(A_\Omega u)(\omega) = a(\omega, x, D_x) u(T_x\omega)|_{x=0}. \tag{19.20}$$

Отождествляя функцию u с однородными случайным полем v, мы можем записать формулу (19.20) в виде

$$A_\Omega v(\omega, x) = a(\omega, x, D_x) v(\omega, x) \tag{19.20$'$}$$

(правая часть представляет собой однородное случайное поле, обращающееся в правую часть (19.20) при $x=0$). Если символ $a=a(\omega, x, \xi)$ допускает оценки (19.13), то оператор A_Ω переводит пространство $C_b^\infty(\Omega)$ в себя. Если A — случайный оператор Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим (19.14), то A_Ω переводит $C_b^\infty(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. В обоих случаях A_Ω можно считать (неограниченным) оператором в $L_2(\Omega)$.

Замечание 19.2. Наряду со случайными дифференциальными и псевдодифференциальными операторами часто рассматривают *случайные разностные операторы*: такие операторы A в $l^2(\mathbf{Z}^n)$, зависящие от случайного параметра $\omega \in \Omega$, где на вероятностном пространстве Ω действует динамическая система $\{T_z, z \in \mathbf{Z}^n\}$, что их матричные элементы $K_A(\omega, x, y)$, $x, y \in \mathbf{Z}^n$ обладают свойством однородности (19.16), в котором $z \in \mathbf{Z}^n$. Примером является дискретный оператор Шрёдингера (19.12), где Δ нужно понимать как оператор Лапласа на решетке $\mathbf{Z}^n$, а q — однородное случайное поле в смысле замечания 19.1. В частности, если $\{q(\cdot, x), x \in \mathbf{Z}^n\}$ — система независимых одинаково распределенных случайных величин, то мы имеем дело с так называемой *моделью Андерсона*.

19.3. Существенная самосопряженность и спектры. Для изучения спектра случайного эллиптического оператора в $L_2(\mathbf{R}^n)$ надо перейти к его замыканию при каждом фиксированном ω. Пусть данный случайный оператор A_ω симметричен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ при п. в. ω. Тогда возникает вопрос о его существенной самосопряженности в $L_2(\mathbf{R}^n)$ при п. в. ω. Проще всего ответить на этот вопрос, если при почти каждом фиксированном ω выполнены какие-либо достаточные условия существенной самосопряженности получающегося неслучайного оператора. Например, так обстоит дело для случайных эллиптических операторов, удовлетворяющих оценкам символов

(19.13), поскольку равномерно эллиптический формально самосопряженный неслучайный оператор с такими оценками символа будет существенно самосопряженным (см., например, [159]). Часто свойства почти всех реализаций случайного поля могут быть указаны явно. Тем не менее удобно формулировать условия существенной самосопряженности на языке вероятностных характеристик коэффициентов. Укажем два результата такого рода, относящихся к оператору Шрёдингера (19.12) в эргодическом случае.

Теорема 19.1 ([153]). Пусть p — наименьшее четное число, строго большее, чем $n/2$ и $q(\cdot, 0) \in L_{p+2}(\Omega)$. Тогда оператор Шрёдингера (19.12) при п. в. ω существенно самосопряжен в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Условие на q здесь означает существование конечного $(p+2)$-го момента случайной величины $q(\cdot, 0)$. В частности, оно выполнено для гауссовского потенциала q, для пуассоновского потенциала q, задаваемого как поле f в примере 19.5 (формула (19.7)) с любой функцией $\varphi \in L_{p+2}(\mathbf{R}^n)$, для потенциала (19.6), в котором функция χ ограничена, а случайная величина ξ_0 имеет конечный $(p+2)$-й момент.

Другого типа условие (налагающее ограничение уже не на значение q в фиксированной точке, а на корреляции) дает

Теорема 19.2 ([54]). Пусть поле q имеет *конечный радиус корреляций*, т. е. существует такое $r_0 > 0$, что если две области V_1, $V_2 \subset \mathbf{R}^n$ таковы, что $\operatorname{dist}(x, y) \geqslant r_0$ для любых $x \in V_1$, $y \in V_2$, то σ-алгебры $\mathcal{F}_j$, $j=1, 2$, порожденные случайными величинами $\{q(\cdot, x), x \in V_j\}$, статистически независимы. Тогда оператор Шрёдингера (19.12) при п. в. ω существенно самосопряжен в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Поставим вопрос о существенной самосопряженности оператора A_Ω, задаваемого на $C_b^\infty(\Omega)$ формулой (19.20).

Теорема 19.3 ([59]). Если A — случайный эллиптический формально самосопряженный оператор с оценками символа (19.13), то оператор A_Ω существенно самосопряжен в $L_2(\Omega)$.

Перейдем к вопросу о спектрах $\sigma(A)$, $\sigma(A_\Omega)$ операторов $A = A_\omega$ и A_Ω. Всюду в дальнейшем эти спектры понимаются как спектры замыканий соответствующих операторов в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и в $L_2(\Omega)$. Всюду ниже будем считать A случайным эллиптическим оператором вида (19.10) или (19.12) и для простоты ограничимся эргодическим случаем. Заметим, что операторы A_ω и $A_{T_z \omega}$ подобны, ввиду (19.15), и, следовательно, имеют одинаковые спектры. Тем самым, спектр $\sigma(A_\omega)$ является инвариантной функцией на Ω (значения этой функции — замкнутые подмножества в $\mathbf{C}$). Отсюда легко вывести, что этот спектр при п. в. ω один и тот же и мы будем обозначать его через $\sigma(A)$. То же самое верно (в самосопряженном случае) для абсолютно непрерывной части спектра $\sigma_{ac}(A_\omega)$, для сингулярной непрерывной части спектра $\sigma_{sc}(A_\omega)$ и для замыкания $\overline{\sigma_p(A_\omega)}$ точечного спектра (множества собственных значений): а именно, все эти части спектра при п. в. ω не зависят от ω ([128], [269], [275], [305]). Отметим, что для $\sigma_p(A_\omega)$, т. е. для самого множества собственных значений, это, вообще говоря, неверно. А именно, если рассмотреть для данного числа λ ортогональный проектор $E_\omega(\{\lambda\})$ на $\mathrm{Ker}(A_\omega-\lambda I)$, то $E_\omega(\{\lambda\})$ будет случайным оператором, однородным в смысле (19.15), а его обычный след $\mathrm{Tr}\, E_\omega(\{\lambda\})=\dim \mathrm{Ker}(A_\omega-\lambda I)$ будет неслучаен (для п. в. ω). Легко доказать, что этот след равен 0 либо $+\infty$ (это очевидно, например, в случае, когда определен и конечен случайный след (19.17)). В частности, для одномерного оператора Шрёдингера A_ω имеем $\dim \mathrm{Ker}(A_\omega-\lambda I)\leqslant 2$, откуда с необходимостью $\mathrm{Tr}\, E_\omega(\{\lambda\})=0$, так что вероятность того, что данная фиксированная точка λ является собственным значением, равна 0 ([128]). Это вовсе не означает однако, что точечный спектр отсутствует. Напротив, как мы увидим ниже, в одномерном случае во многих ситуациях весь спектр *чисто точечный*, т. е. существует ортонормированный базис из собственных функций. Таким образом, в этом случае собственные значения, будучи весьма чувствительны к возмущениям, существенно зависят от ω.

Обсудим теперь вопрос о связи спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(A_\Omega)$ одного и того же оператора A в пространствах $L_2(\mathbf{R}^n)$ и $L_2(\Omega)$. Легко проверяется включение

$$\sigma(A_\Omega)\subset\sigma(A). \tag{19.21}$$

Обратное же включение верно не всегда. Например, пусть $\Omega=\mathbf{R}^n/\Gamma$, где Γ — решетка в $\mathbf{R}^n$ (так что Ω — n-мерный тор) и $\mathbf{R}^n$ действует на Ω естественными сдвигами. Тогда случайный эллиптический оператор A_ω, в силу свойства однородности, при п. в. ω имеет Γ-периодические коэффициенты. Спектр $\sigma(A_\Omega)$ в этом случае есть просто спектр оператора A_ω на торе Ω, так что этот спектр дискретен. В то же время спектр $\sigma(A_\omega)$ имеет зонную структуру (см. § 17) и тем самым не может совпадать с $\sigma(A_\Omega)$. Оказывается, что наличие нетривиальных периодов у динамической системы $\{T_x\}$ является единственным препятствием к совпадению спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(A_\Omega)$. А именно, введем в общем случае группу периодов динамической системы по формуле

$$\Gamma=\{z\in\mathbf{R}^n,\ T_z\omega=\omega \text{ при п. в. } \omega\}, \tag{19.22}$$

или, что то же самое, Γ — группа тех $z\in\mathbf{R}^n$, для которых $V_z=I$.

Теорема 19.4 ([79]). Пусть A — случайный эллиптический оператор порядка $m>0$ с оценками символа (19.13) и динамическая система $\{T_z\}$ *апериодична*, т. е. $\Gamma=\{0\}$. Тогда

$\sigma(A_\Omega)=\sigma(A)$. В общем случае для произвольной группы периодов Γ спектр $\sigma(A_\Omega)$ совпадает при п. в. ω со спектром операторов, задаваемых операторами A_ω в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n/\Gamma)$.

Эта теорема очевидным образом обобщает теорему 18.1 о совпадении спектров почти-периодического эллиптического оператора в пространствах $L_2(\mathbf{R}^n)$ и $B^2(\mathbf{R}^n)$. Для ее доказательства устанавливается, что если A самосопряжен и $\varphi \in S(\mathbf{R})$ то $\varphi(A)$ — случайный интегральный оператор в $L_2(\mathbf{R}^n)$, ядро которого $K(\omega, x, y)$ быстро убывает вне диагонали, т. е. при $|x-y| \to +\infty$, что позволяет определить $\varphi(A_\Omega)$ с помощью того же ядра в пространстве $L_2(\Omega)$, отождествляемом с пространством однородных случайных полей. Условие апериодичности позволяет установить, что равенства $\varphi(A)=0$ и $\varphi(A_\Omega)=0$ эквивалентны, что равносильно совпадению спектров.

При некоторых условиях, отличающихся от описанных выше, результат типа теоремы 19.4 может быть получен с помощью техники алгебр фон Неймана ([179]), в том числе для операторов порядка $m \leqslant 0$.

19.4. Плотность состояний. *Предельная функция распределения спектра* или *проинтегрированная плотность состояний* $N(\lambda)$ может быть определена для случайного самосопряженного эллиптического дифференциального оператора A так же, как в почти периодическом случае (см. п. 18.4), т. е. формулой (18.11). Существование при п. в. ω предела в (18.11), иногда называемое *самоусредняемостью*, в случае операторов 2-го порядка доказано в [126], [127], [144], а в случае оператора A высокого порядка — в [57], причем схема доказательства, описанная в п. 18.4, проходит и в этом случае. При этом инвариантность относительно сдвигов по x сразу дает инвариантность $N(\lambda)$, как функции от случайного параметра ω, относительно преобразований динамической системы $\{T_z, z \in \mathbf{R}^n\}$. Отсюда следует, что в эргодическом случае, которым мы для простоты ограничимся в дальнейшем, функция $N(\lambda)$ неслучайна. При этом, в случае операторов вида (19.10) (с оценками коэффициентов (19.11)) она выражается через спектральный проектор E_λ оператора A по формуле

$$N(\lambda)=\mathrm{Tr}_R E_\lambda = M_x\{e(\lambda, x, x)\} = \bar{e}(\lambda, 0, 0), \qquad (19.23)$$

где через $\bar{e}(\lambda, 0, 0)$ обозначено математическое ожидание случайной величины $e(\lambda, 0, 0)$ (см. (19.2) и (19.17)). Схема доказательства самоусредняемости остается той же, что для п. п. операторов (см. п. 18.4). В случае оператора Шрёдингера здесь можно использовать представление фундаментального решения задачи Коши и функции Грина с помощью формулы Фейнмана — Каца через интеграл Винера (см. [62], [266]). На этом пути получается, в частности, следующее выражение для преобразования Лапласа функции $N(\lambda)$ (см. (18.13))

$$\tilde{N}(t)=(2\pi t)^{-n/2}W\left\{M\left\{\exp\left(-\int_0^t q(\omega, x(s))\,ds\right)\right\}\Big| x(t)=0\right\},\quad (19.24)$$

где W означает интеграл Винера по таким траекториям $x(s)$ броуновского движения в $\mathbf{R}^n$, что $x(0)=x(t)=0$, а M означает усреднение по случайному параметру ω, входящему в потенциал.

В п. 18.4 были приведены другие результаты о самоусредняемости. Все они переносятся на операторы со случайными коэффициентами ([57], [127]). Это же относится к результатам С. М. Козлова об операторах (18.25), описанным в п. 18.5.

Спектр $\sigma(A_\omega)$ случайного оператора A_ω в $L_2(\mathbf{R}^n)$ при п. в. ω совпадает с множеством точек роста функции $N(\lambda)$ как и в п. п. случае (см., напр., [58], [303]).

Отметим еще, что формула (19.23) позволяет определить функцию $N(\lambda)$ для более широкого класса операторов: например, для самосопряженных случайных эллиптических или гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов. При этом для $N(\lambda)$ можно установить следующий вариационный принцип (Т. Е. Богородская, М. А. Шубин [30]), аналогичный (18.24):

$$N(\lambda)=\sup_{P\in\mathcal{P}_\lambda(A)} \operatorname{Tr}_R P, \qquad (19.25)$$

где $\mathcal{P}_\lambda(A)$ — множество таких случайных однородных бесконечно сглаживающих (в стандартной соболевской шкале пространств $H_s(\mathbf{R}^n)$) ортогональных проекторов P, что $P(A-\lambda I)P\leqslant \leqslant 0$. В доказательстве (19.25) существенно используется теория индекса случайных эллиптических операторов, построенная Б. В. Федосовым и М. А. Шубиным [149].

Асимптотические свойства функции $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ для случайных эллиптических операторов в основном такие же, как в почти-периодическом случае. С помощью следа (19.17) можно ввести *ζ-функцию самосопряженного положительного случайного эллиптического оператора A* вида (19.10) (с оценками коэффициентов (19.11) и доказать возможность её мероморфного продолжения в $\mathbf{C}$ с теми же аналитическими свойствами, что и в п. п. случае (п. 18.5). Отсюда, в частности, следует, что для $N(\lambda)$ имеется вейлевская асимптотика (18.22). Хёрмандеровская оценка остатка в этой асимптотике также перенесена А. И. Гусевым [57] на случайные эллиптические операторы (ее можно получить, например, установив равномерность асимптотики спектральной функции по x и затем взяв среднее значение по x). Для оператора Шрёдингера с ограниченным случайным потенциалом верна асимптотика (18.23) (ее доказательство проходит без всяких изменений).

Рассмотрим еще физически интересный вопрос о поведении $N(\lambda)$ на нижней (или, как говорят, *флуктуационной*) границе спектра. В п. п. случае также иногда можно найти такую асимптотику $N(\lambda)$ (см. формулу (18.30) и помещенное после формулы (18.31) указание, как можно распространить асимптотику (18.30) на случай операторов Шрёдингера), однако богатство возможных моделей случайных операторов дает возможность получить здесь ряд принципиально новых результатов. Приведем примеры таких результатов ([127], [129]), для случайных операторов Шрёдингера (19.12).

a) Пусть потенциал q гауссовский (см. п. 19.1), причем его корреляционная функция $B(x)=M\{q(\omega, x)\,q(\omega, 0)\}$ удовлетворяет условиям: $B\in C^2(\mathbf{R})$; $|B(x)|\leqslant c|x|^{-\alpha}$, где $\alpha>0$; $|\tilde{B}(0)-\tilde{B}(x)|\leqslant c|\ln|x||^{-a}$ при $|x|<1$, где $a>1$, $\tilde{B}(x)=-\Delta B(x)$. Тогда при $\lambda\to-\infty$

$$\ln N(\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2b}(1+o(1)), \tag{19.26}$$

где $b=B(0)$.

в) Пусть q — пуассоновский потенциал (пример 19.5) с непрерывной функцией $\varphi\leqslant 0$ (*притягивающие центры*), имеющей строгий минимум в точке 0. Тогда $\inf\sigma(A)=-\infty$ и при $\lambda\to-\infty$

$$\ln N(\lambda)=-\frac{\lambda}{\varphi(0)}\ln\frac{\lambda}{\varphi(0)}(1+o(1)). \tag{19.27}$$

c) Пусть q — пуассоновский потенциал с такой функцией $\varphi\geqslant 0$, что $\varphi(x)=\varphi_0|x|^{-\alpha}(1+o(1))$ при $|x|\to\infty$, где $n<\alpha<n+2$ (*отталкивающие дальнодействующие центры*). Тогда $\inf\sigma(A)=0$ и при $\lambda\to+0$

$$\ln N(\lambda)=-c(\varphi_0, \alpha, n)\,\lambda^{\frac{n}{\alpha}-1}(1+o(1)). \tag{19.28}$$

Эти результаты получаются оценками винеровского интеграла (19.24) с последующим применением тауберовых теорем.

d) Пусть q — пуассоновский потенциал с такой функцией $\varphi\geqslant 0$, что $\varphi(x)=o(|x|^{-n-2})$ при $|x|\to\infty$ (отталкивающие близкодействующие центры). Тогда $\inf\sigma(A)=0$ и при $\lambda\to+0$

$$\ln N(\lambda)=-c(\gamma_n\lambda^{-1})^{n/2}(1+o(1)), \tag{19.29}$$

где постоянная c та же, что в (19.8), γ_n — первое собственное значение оператора $(-\Delta)$ с условиями Дирихле в n-мерном шаре единичного объема. Результаты а)—с) получаются оценками винеровского интеграла (19.24) для $\tilde{N}(t)$ при больших t с последующим применением подходящих тауберовых теорем. Для получения утверждения d) необходим дополнительно анализ больших отклонений винеровского процесса ([42], [219]). Другие результаты такого типа и комментарии к ним можно найти в [55], [130], [269], [271], [305], [327].

Бовье, Кампанино, Клейн и Перес [191] использовали суперсимметричное кластерное разложение резольвенты в модели Андерсона для получения существенной информации о локальной гладкости $N(\lambda)$ по λ. Из их результатов, в частности, следует, что если в модели Андерсона случайные величины $q(\cdot, x)$, $x \in \mathbf{Z}^n$, равномерно распределены на каком-либо конечном отрезке, то $N \in C^\infty(\mathbf{R})$. Другие результаты о локальной гладкости $N(\lambda)$ см. в [210], [328].

Отметим еще, что показатель Ляпунова $\gamma(\lambda)$ определен формулой (18.32) и для одномерных случайных операторов Шрёдингера (вместо $\tilde{A}$ надо брать A_ω) в силу мультипликативной эргодической теоремы В. И. Оселедца [124]. В эргодическом случае он не зависит от ω при п. в. ω. При этом все указанные в конце § 18 свойства этого показателя (связь с абсолютно непрерывным спектром, формула Таулеса (18.33), неравенство Дейфта и Саймона (18.34)) переносятся на этот случай.

19.5. Характер спектра. Локализация Андерсона. Как мы видели в § 18, вопрос о характере спектра операторов с п. п. коэффициентами является весьма трудным и вряд ли может быть окончательно решен. Тем более это так для общих операторов со случайными коэффициентами. Однако в моделях, существенно более случайных, чем почти детерминированные п. п. модели, здесь возникают новые дополнительные возможности и получен ряд глубоких результатов.

Андерсон [171], Мотт и Туз [299] впервые эвристически показали, что при наличии достаточно случайного поведения потенциала одномерного оператора Шрёдингера должно иметь место следующее поведение спектра и собственных функций:

а) весь спектр чисто точечный;

б) собственные функции экспоненциально убывают. Совокупность свойств а), б) называется *локализацией Андерсона.* В частности, при наличии локализации Андерсона собственные значения должны образовывать в спектре $\sigma(A)$ рассматриваемого оператора A плотное множество, а абсолютно непрерывного и сингулярного непрерывного спектра не должно быть.

Первой математической работой, в которой была доказана точечность спектра (утверждение а)), была работа И. Я. Гольдшейда, С. А. Молчанова и Л. А. Пастура [50], где в качестве потенциала рассматривался диффузионно порожденный потенциал (см. пример 19.6). Утверждение б) об экспоненциальной локализации было для той же модели доказано С. А. Молчановым [116]. Доказательства основаны на предельном переходе от отрезка $[-L, L]$ и использовании глубоких фактов теории вырождающихся параболических уравнений, которым удовлетворяют переходные плотности возникающих марковских процессов.

Скорость экспоненциального убывания собственных функций определяется показателем Ляпунова (см. [194], [211], [274]).

В дальнейшем рядом авторов были предложены новые методы установления локализации Андерсона, дающие возможность рассмотреть одномерные случайные операторы Шрёдингера (и более общие операторы 2-го порядка) других типов. Таков, например, метод Кунца и Суйяра [275], примененный ими к случаю дискретного оператора Шрёдингера и основанный на идеях теории рассеяния, а затем перенесенный на непрерывный случай Ройером [314] и Кармоной [194].

Обсудим теперь многомерный случай. Здесь эвристические соображения (см., например, [282]) говорят, что для достаточно случайных потенциалов при $n=2$ по-прежнему должна иметь место локализация Андерсона, а при $n \geqslant 3$ спектр должен быть точечным на полуоси $\lambda < \lambda_0$ и непрерывным на полуоси $\lambda > \lambda_0$ (точка λ_0 называется в этом случае *ребром подвижности* — mobility edge).

Строгие результаты здесь берут начало с работы Фрелиха и Спенсера [231], где рассматривались модель Андерсона (см. замечание 19.2) для большого беспорядка (это можно понимать, беря в качестве потенциала $gV(\omega, x)$, где g — большой параметр, а V — фиксированный потенциал модели Андерсона) или при низких энергиях. При этом считается, что распределение потенциала имеет ограниченную плотность по мере Лебега. Вместо локализации в [231] доказано экспоненциальное убывание ядра резольвенты $(A-\lambda I+i\varepsilon)^{-1}$ при $|x-y| \to +\infty$ равномерно по $\varepsilon > 0$. В дальнейшем (см. [230], [232], [282]) из этого оказалось возможным вывести локализацию Андерсона. Более того, был предъявлен механизм локализации (см. [282]), основанный на открытом Йона—Лазинио, Мартинелли и Скопполой явлении неустойчивости квантового туннелирования. А именно, нелокализованность собственных функций в случае периодического потенциала объясняется туннельным эффектом и связано со строгой трансляционной симметрией. Аналогичный эффект имеет место, например, для четного потенциала на $\mathbf{R}^1$ с двумя симметричными ямами, когда собственные функции либо четны либо нечетны, т. е. *делокализованы*. Однако при небольшом возмущении, разрушающем четность, собственные функции в квазиклассическом приближении локализуются в одной из ям. Аналогичный эффект, но при бесконечном числе ям имеет место в модели Андерсона с большим беспорядком или малой энергией.

В работе [282] рассмотрена также одна непрерывная модель: оператор Шрёдингера в $\mathbf{R}^n$ с потенциалом

$$q(\omega, x)=\sum_i \xi_i \varphi(x-x_i),$$

где точки x_i распределены по Пуассону (см. пример 19.5), ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $[0, 1]$ и с распределением, имеющим ограниченную плотность по мере Лебега, а φ — ограниченная функция с компактным носителем, причем $\varphi(x)\leqslant 0$ при всех x. В этом случае при $\varphi\neq 0$ спектр не ограничен снизу и если постоянная c в (19.8) (средняя концентрация примесей) достаточно мала, то отрицательный спектр чисто точечный и собственные функции экспоненциально убывают, т. е. для отрицательного спектра имеет место локализация Андерсона.

И в многомерном случае локализация Андерсона может иметь место в случае почти-периодических потенциалов. А именно, так обстоит дело, например, в так называемой *«мэрилендской модели»*: для дискретного оператора Шрёдингера $H_{\alpha, \theta, g}$ с потенциалом

$$V(z)=V_{\alpha,\theta,g}(z)=g\operatorname{tg}[\pi(\alpha\cdot z)+\theta],\ z\in\mathbf{Z}^n,$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in\mathbf{R}^n$, $\theta\in[0, 2\pi]$, причем $\theta\neq\pi(\alpha\cdot z)+\pi/2 \bmod 2\pi$, так что $V(z)$ определено при всех $z\in\mathbf{Z}^n$. Для набора частот $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ предполагается выполненным диофантово условие (18.7). Тогда для оператора $H_{\alpha,\theta,g}$ имеет место локализация Андерсона (см. [183], [213], [306], [326] и имеющиеся там ссылки). При этом спектр совпадает с $\mathbf{R}$, он однократен и можно явно вычислить проинтегрированную плотность состояний.

Обсуждение других аспектов теории локализации можно найти в работах [215]—[217], [329], [330], а также в обзорах, упомянутых в начале этого параграфа.

§ 20. Несамосопряженные дифференциальные операторы, близкие к самосопряженным

20.1. Вводные замечания. Спектральная теория несамосопряженных (не с. с.) операторов значительно сложнее, чем самосопряженных. В большой мере это связано с отсутствием универсальной «модели» (подобной операторам умножения в с. с. теории — см. пример 1.2 и теоремы 1.3, 1.4). Для различных классов не с. с. операторов приходится использовать те или иные индивидуальные средства. Среди них наиболее важное место занимают средства теории возмущений, позволяющие исследовать операторы, близкие к самосопряженным; этим классом операторов мы здесь в основном и ограничимся.

Отметим еще, что для спектрального анализа обыкновенных д. о. широко используется техника, основанная на изучении свойств фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}u-\lambda u=0$ как аналитической функции от λ. Эта техника применима как в с. с., так и не с. с. случаях и позволяет, в частности, исследовать спектр операторов, не близких к самосопряженным. По этому поводу см. М. А. Наймарк [121], А. Г. Костюченко и И. С. Саргсян [85]. В диссипативном случае весьма эффективным средством оказалась так называемая «функциональная модель Надя—Фойяша», применимая также к некоторым многомерным задачам; об использовании этой модели в спектральной теории д. о. см. статью Б. С. Павлова в настоящей серии.

В отличие от с. с. случая, не с. с. оператор ни в каком смысле не определяется своими спектральными характеристиками — хотя бы потому, что существуют не с. с. операторы с пустым спектром.

Пример 20.1. Спектр (в $L_2(0, 1)$) оператора задачи Коши $A=-i\frac{d}{dt}\restriction\{u\in H^1(0, 1):u(0)=0\}$ пуст.

Если спектр непуст, то тогда возникает много новых, по сравнению с с. с. случаем, вопросов. Прежде всего, если λ — собственное значение оператора A, то, наряду с собственными элементами $x\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$, у оператора могут существовать присоединенные элементы $(x\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^p$ при каком-либо $p>1)$. Линейное множество $\mathfrak{H}(\lambda)=\bigcup\limits_p\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^p$ называется *корневым линеалом* (это — аналог жордановой клетки в линейной алгебре). Оно может оказаться незамкнутым.

Пример 20.2. Для оператора $A=-i\frac{d}{dt}\restriction H^1(0, 1)$ любое $\lambda\in\mathbf{C}$ является собственным значением; соответствующий корневой линеал есть $\mathcal{P}\exp(i\lambda t)$, где $\mathcal{P}$ — множество всех многочленов. Таким образом, каждый корневой линеал незамкнут и плотен в пространстве $L_2(0, 1)$.

Мы ограничимся далее обсуждением лишь таких замкнутых операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, что естественное вложение пространства $D(A)$ (с A-метрикой (1.1)) в $\mathfrak{H}$ компактно и, кроме того, резольвентное множество $\rho(A)$ непусто. Абстрактная теория таких операторов с дискретным спектром изложена в книге И. П. Гохберга и М. Г. Крейна [53]. Отметим, что оператор из примера 20.1 входит в обсуждаемый класс, а оператор из примера 20.2 — не входит.

Предположим для определенности, что $0\in\rho(A)$; тогда обратный оператор A^{-1} компактен. Спектр $\sigma(A)$ состоит из конечной или бесконечной последовательности собственных значений $\{\lambda_k\}$; если она бесконечна, то $|\lambda_k|\to\infty$ (отсюда и термин — «операторы с дискретным спектром»). Размерность каждого корневого линеала $\mathfrak{H}(\lambda_k)$ конечна; она называется *алгеб-*

раической кратностью собственного значения λ_k — в отличие от *геометрической кратности* $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_k I)$. Мы видим, в частности, что корневые линеалы оператора с дискретным спектром замкнуты; поэтому обычно употребляют термин *корневые подпространства*.

Пусть Γ — положительно ориентированный контур в $\mathbf{C}$, не пересекающийся со спектром оператора A (такой контур будем называть *допустимым* для A). Если A — оператор с дискретным спектром и внутри Γ содержится единственная точка λ спектра A, то формула Рисса

$$P(\lambda) = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (A-\zeta I)^{-1}\, d\zeta \tag{20.1}$$

определяет спектральный проектор (вообще говоря, не ортогональный) на корневое подпространство $\mathfrak{H}(\lambda)$. Выбрав в каждом подпространстве $\mathfrak{H}(\lambda_k)$, $\lambda_k \in \sigma(A)$, базис (например, ортонормированный), получаем систему корневых векторов (с. к. в.) оператора A. С ее изучением связаны важные вопросы несамосопряженной спектральной теории. Первый из них — это вопрос о полноте с. к. в. Пример 20.1 показывает, что с. к. в. оператора с дискретным спектром не всегда полна. Далее, даже если с. к. в. полна, она, вообще говоря, не является базисом, т. е. разложение

$$f \sim \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P(\lambda) f \tag{20.2}$$

не обязательно сходится в $\mathfrak{H}$ для любого $f \in \mathfrak{H}$. Исследование сходимости или суммируемости в каком-либо смысле рядов (20.2) составляет предмет теорем разложения. Напомним, что для с. с. операторов с дискретным спектром, ввиду попарной ортогональности собственных подпространств, имеет место как свойство полноты, так и свойство разложения; оба они выражаются равенствами (1.5′).

Для многих классов не с. с. операторов оказывается, что разложение (20.2) становится сходящимся, если в нем подходящим образом сгруппировать члены.

Определение 20.1. Оператор A имеет *корневой базис со скобками*, если для некоторого представления $\sigma(A) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots$ спектра A в виде счетного объединения конечных множеств для любого $f \in \mathfrak{H}$ сходится к f ряд

$$\sum_j P_j f, \quad P_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} P(\lambda), \tag{20.3}$$

где $P(\lambda)$ — проекторы (20.1).

Этот базис является *базисом Рисса со скобками*, если ряд (20.3) сходится безусловно (т. е. если его сумма не зависит от порядка членов).

Разложение (20.3) является своеобразным усредненнем обычного разложения (20.2) по корневым векторам, и наличие сведений о размерности проекторов P_j (т. е. о частоте расстановки скобок) позволяет исследовать скорость сходимости ряда (см. [1], [2]). При отсутствии базисности со скобками применяются различные методы суммирования ряда (20.2); мы рассмотрим здесь *метод Абеля.*

Для $\lambda \in \sigma(A)$ введем оператор

$$P(\alpha;\ \lambda,\ t) = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{-t\zeta^{\alpha}} (A - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \quad \alpha > 0,$$

где Γ — допустимый контур, окружающий точку λ.

Разложение (20.2) суммируется методом Абеля порядка α, если для любого $f \in \mathfrak{H}$ сходится ряд

$$E_{\alpha}(f;\, t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P(\alpha;\, \lambda,\, t)\, f, \quad t > 0,$$

и $E_{\alpha}(f;\, t) \to f$ при $t \to +0$.

В количественной теории спектра не с. с. операторов возникает новый вопрос об оценке отклонения собственных значений от вещественной оси. При изучении спектральной асимптотики исследуется функция распределения модулей собственных значений, либо их вещественных частей. Для операторов, близких к самосопряженным, обе функции эквивалентны.

20.2. Основные примеры. Приведем типичные примеры д. о. с дискретным спектром.

Пример 20.3. Регулярный эллиптический оператор. Пусть X — компактное многообразие без края, $d\mu$ — положительная плотность на X, $\mathcal{L}$ — эллиптическое д. в. порядка m на X. Оператор $\mathcal{L} \restriction H_m(X)$ замкнут; если он имеет хотя бы одну регулярную точку, то его спектр дискретен. Это прямо вытекает из компактности вложения пространства $H^m(X)$ в $L_2(X, d\mu)$.

Предположение о существовании хотя бы одной регулярной точки не является излишним. Так, оператор $\mathcal{L}u = \exp(i\varphi)du/d\varphi$ в $L_2(S^1)$ эллиптичен, но не имеет регулярных точек: при любом $\lambda \in \mathbf{C}$ уравнение $\mathcal{L}u = \lambda u$ имеет периодическое решение $u(\varphi) = \exp(-\lambda e^{i\varphi})$.

Сказанное в примере 20.3 переносится на эллиптические операторы в векторных расслоениях, а также на операторы регулярных эллиптических граничных задач на многообразии с краем.

Пример 20.4. Оператор Шрёдингера с комплексным потенциалом. В пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ рассмотрим д. в.

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + Vu \tag{20.4}$$

в предположении, что потенциал $V \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ — комплексно-значная функция. Пусть функции $V_0 = \mathrm{Re}\, V$, $V_1 = \mathrm{Im}\, V$ удовлетворяют условиям:

$$V_0(x) \geqslant c > 0, \quad |V_1(x)| \leqslant q + bV_0(x); \quad q, b \geqslant 0. \qquad (20.5)$$

Для точного определения соответствующего дифференциального оператора воспользуемся методом квадратичных форм. Пусть $a_0[u] = \int (|\nabla u|^2 + V_0|u|^2)\,dx$, с естественной областью определения $d_0 = d[a_0]$ (см. пример 3.6). Пусть, далее, $A_0 = Op(a_0)$ и $a_1 = \int V_1 |u|^2 dx$. При условиях (20.5) вариационная тройка $\{d_0;\ a_0, a_1\}$ определяет с. с. ограниченный оператор T в пространстве d_0. Для него

$$a_1[u, v] = a_0[Tu, v] = \left(A_0^{1/2} Tu,\ A_0^{1/2} v\right) \ \forall u, v \in d_0. \qquad (20.6)$$

Оператор $S = A_0^{1/2} T A_0^{-1/2}$ самосопряжен и ограничен в $L_2(\mathbf{R}^n)$. За реализацию д. в. (20.4) естественно принять (замкнутый) оператор

$$A = A_0^{1/2}(I + iS)A_0^{1/2}; \quad D(A) = \{u \in d_0 : A_0^{1/2} u + iSA_0^{1/2} u \in d_0\}. \ (20.7)$$

В самом деле, при $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, в силу (20.6), имеем $V_1 u = A_0^{1/2} S A_0^{1/2} u$.

С оператором A естественно связана квадратичная форма

$$a[u] = a_0[u] + ia_1[u] = \int (|\nabla u|^2 + V|u)^2)\,dx \ \ u \in d_0. \qquad (20.8)$$

Ее значения (в случае $q=0$) лежат в некотором секторе $|\arg a[u]| < \theta$, $\theta < \pi/2$, в $\mathbf{C}$. Оператор A может быть определен по форме (20.8) с помощью теории секториальных квадратичных форм (Като [268]), обобщающей конструкцию Фридрихса; получающийся оператор совпадает с оператором (20.7).

Предположим дополнительно, что в условиях примера 20.4 $V_0(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда оператор $A_0^{-1/2}$ компактен, а вместе с ним — и оператор A^{-1}, следовательно, в этом случае спектр оператора Шрёдингера (20.7) дискретен.

20.3. Теоремы полноты. Эффективным средством изучения спектральных свойств не с. с. операторов с дискретным спектром часто оказывается применение абстрактных теорем о возмущениях с. с. операторов. Такие теоремы опираются на формулу (20.1); их доказательство требует детального исследования резольвенты оператора, при этом нередко приходится использовать весьма глубокие результаты теории функций.

Чтобы охарактеризовать «величину» возмущений, понадобятся следующие понятия. Пусть A_0 — с. с. оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Оператор A называется A_0-*компактным*, если $D(B) \supset D(A_0)$ и оператор $B(A_0 - iI)^{-1}$ компактен; это равносильно компактности B как оператора из пространства $D(A_0)$ (с A_0-*нормой*) в $\mathfrak{H}$. В этих условиях оператор $(A_0 + B) \restriction D(A_0)$ замкнут и, как мы увидим в дальнейшем, его спектральные свойства близки к соответствующим свойствам оператора A_0.

Пусть, далее, $\{d;\ a_0, b\}$ — тройка, удовлетворяющая всем условиям п. 1.10, за тем исключением, что форма $b[u, v]$ — не обязательно эрмитова. Соотношение (1.10) по-прежнему определяет некоторый ограниченный в d оператор $T = T(d;\ a_0,\ b)$; если он компактен, то форму b называют *a_0-компактной.* Если при этом формы a_0, b реализованы как квадратичные формы некоторых операторов A_0, B в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см. п. 1.10), то говорят, что оператор B *A_0-компактен в смысле форм.* В этом случае компактность оператора $T(d;\ a_0,\ b)$ равносильна компактности оператора $S = A_0^{1/2} T A_0^{-1/2}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. По определению полагают (ср. пример 20.4)

$$\begin{gathered} D(A_0 + B) = \{x \in d : (I + S) A_0^{1/2} x \in d\}; \\ (A_0 + B)x = A_0^{1/2}(I + S) A_0^{1/2} x. \end{gathered} \tag{20.9}$$

(«сумма в смысле форм»). Это определение естественно, поскольку для элементов x из исходной области определения оператора B из (1.10) легко следует, что $A_0^{1/2} S A_0^{1/2} x = Bx$. В дальнейшем будем писать $S = A_0^{-1/2} B A_0^{-1/2}$ (хотя эта запись и не вполне точна). Как и в случае A_0-компактности в операторном смысле, спектральные свойства оператора (20.9) близки к соответствующим свойствам A_0.

В приложениях к дифференциальным операторам проверка A_0-компактности (в обоих смыслах) основывается на теоремах вложения. Так, если A_0 — регулярный эллиптический оператор, B — д. о. с ограниченными коэффициентами и $\operatorname{ord} B < \operatorname{ord} A_0$, то B является A_0-компактным. Далее, если $a_0[u]$, $b[u]$ — дифференциальные квадратичные формы, причем на $d[a_0]$ $a_0[u] \geqslant \geqslant c\|u\|_H{}^r$, $c > 0$, и $\operatorname{ord} b < r$, то форма b является a_0-компактной.

Многочисленные признаки полноты с. к. в. для операторов, близких к самосопряженным, изложены в книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [53]. Для случая д. о. наиболее полезной оказывается следующая теорема (в существенном принадлежащая М. В. Келдышу).

Теорема 20.1. Пусть A_0 — с. с. оператор с дискретным спектром, B — такой A_0-компактный оператор, что при каком-либо $p > 0$ сходится ряд $\sum\limits_j s_n(B(A_0 - iI)^{-1})^p$. Тогда $A = A_0 + B$ — оператор с дискретным спектром; вне любого угла $|\operatorname{Im}\lambda| < < \varepsilon|\operatorname{Re}\lambda|$, $\varepsilon > 0$, лежит не более конечного числа собственных значений $\lambda_j(A)$; с. к. в. оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Результаты сохраняются, если A_0 положительно определен, B является A_0-компактным оператором в смысле форм и сходится ряд

$$\sum_n s_n^p(A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}).$$

Результаты другого типа, допускающие более сильное отклонение от самосопряженности, накладывают условие на вид числовой области оператора A, т. е. области значений его квадратичной формы (Ax, x), $x \in D(A)$, $\|x\|=1$.

Теорема 20.2 ([53]). Пусть A — обратимый оператор, его числовая область содержится в некотором секторе $|\arg z-\alpha|<<\pi/2p$, $p>1$, и

$$s_n(A^{-1}-(A^{-1})^*)=o(n^{-1/p}).$$

Тогда с. к. в. оператора A полна.

20.4. Теоремы разложения и суммируемости. Асимптотика спектра. Переходя к вопросам сходимости спектральных разложений, отметим с самого начала, что для ие с. с. дифференциальных операторов с. к. в. оказывается базисом крайне редко (некоторые примеры таких операторов для одномерного случая приведены в [2]). С другой стороны, имеется много признаков базисности со скобками, причем, как показывает «экспериментальный материал», естественно возникающие базисы со скобками обычно сказываются безусловными.

Пусть $A_0>0$ — с. с. оператор. Условия базисности со скобками с. к. в. оператора A_0+B (равно как и условия справедливости формул спектральной асимптотики, близких к стандартным формулам из § 9), как правило, формулируются в терминах малости «возмущения» B относительно A_0.

Определение 20.2. Пусть $0\leqslant p<1$. Оператор B называется *A_0^p-ограниченным*, если $D(B)\supset D(A_0^p)$ и оператор BA_0^{-p} ограничен в $\mathfrak{H}$; *B p-подчинен* оператору A_0, если $D(B)\supset D(A_0)$ и, с некоторой постоянной c, $\|Bu\|\leqslant c\|A_0u\|^p\|u\|^{1-p}$. Наконец, квадратичная форма $b[u]$ *p-подчинена* форме $a_0=QF(A_0)$ (или оператору A_0), если

$$|b[u]|\leqslant c(a_0[u])^{p/2}\|u\|^{2-p},\quad u\in d[a_0]. \tag{20.10}$$

Отметим, что из A_0^p-ограниченности вытекает p-подчиненность, но из p-подчиненности следует лишь A_0^q-ограниченность при любом $q>p$. Если A_0 — оператор с дискретным спектром, то из p-подчиненности оператора B или его формы оператору A_0 вытекает его *A_0-компактность* (в соответствующем смысле); это позволяет корректно определить оператор A_0+B.

Теорема 20.3 (см. М. С. Агранович [1], А. С. Маркус, В. И. Мацаев [104], [105]). Пусть A_0 — положительно определенный с. с. оператор и $N(\lambda;A_0)=o(\lambda^\gamma)$, $\lambda\to\infty$. Предположим, что при некотором $p\in(0,1)$ оператор B p-подчинен A_0. Тогда при $p+\gamma\leqslant1$ с. к. в. оператора $A=A_0+B$ образует базис Рисса скобками; при $p+\gamma>1$ разложение (20.2) суммируемо методом Абеля порядка α, $\alpha>p+\gamma-1$.

Теоремы о базисности доказываются обычно путем сравнения разложения (20.2) с аналогичным разложением по ортонормированным собственным векторам с. с. оператора A_0. Пусть Γ_j — последовательность допустимых для A и для A_0 контуров, охватывающих части спектра Λ_j, M_j операторов A, A_0; P_j, Q_j — соответствующие спектральные проекторы, тогда сходимость ряда (20.3) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_j (Q_j-P_j)\,f=-(2\pi i)^{-1}\sum_j \int_{\Gamma_j}((A-\zeta I)^{-1}-(A_0-\zeta I)^{-1})f\,d\zeta, \quad (20.11)$$

Таким образом, дело сводится к отысканию требуемой системы допустимых контуров Γ_j и к оценке интегралов вида (20.11).

Сходным образом, на оценки резольвент опираются доказательства теорем об асимптотике спектра не с. с. операторов. Будем, в дополнение к п. 1.11, обозначать через $\widetilde{N}(r;A)$ количество собственных значений оператора A, с учетом их алгебраической кратности, в круге $|\lambda|<r$. Пусть Γ_r — допустимый для A и A_0 контур, охватывающий такие собственные значения, тогда

$$\widetilde{N}(r;\ A)-\widetilde{N}(r;\ A_0)=-(2\pi i)^{-1}\,\mathrm{Tr}\int_{\Gamma_r}((A-\zeta I)^{-1}-$$
$$-(A-\zeta_0 I)^{-1})\,d\zeta. \quad (20.12)$$

Если спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(A_0)$ достаточно удалены от контура Γ_r, т. е. в спектрах операторов A и A_0 имеется достаточно большая «лакуна», то из «малости» оператора B выводится близость резольвент $(A-\zeta I)^{-1}$ и $(A_0-\zeta I)^{-1}$ и, в конечном счете, малость интеграла (20.12). Если же такой лакуны в спектре нет, то ее можно образовать искусственно, добавляя к A и A_0 подходящие конечномерные операторы. Подробное изложение соответствующей техники и полученных результатов см. в [105].

Теорема 20.4 (А. С. Маркус, В. И. Мацаев [104], [105]). Пусть $A_0>0$ — с. с. оператор с дискретным спектром и оператор B p-подчинен A_0, $0\leqslant p<1$, в операторном смысле или в смысле форм. Тогда собственные значения оператора $A=A_0+B$, за исключением конечного числа, содержатся внутри области $|\mathrm{Im}\,\lambda|\leqslant c\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^p$, и при некотором $q>0$

$$\widetilde{N}(r;\ A)-N(r;\ A_0)=O(N(r+qr^p;\ A_0)-N(r-qr^p;\ A_0)). \quad (20.13)$$

Результат теоремы распространяется и на показатели $p<0$, при этом условие на B состоит в том, что оператор BA_0^{-p} продолжается до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. Теорема 20.4 переносится также на случай неполуограниченных операторов A_0, причем формула типа (20.13) оказывается справедливой в отдельности для спектра A вблизи положительного и отрицательного лучей.

Значение этих результатов в том, что они практически полностью решают (на абстрактном уровне!) вопросы об асимптотическом поведении спектра операторов, близких к самосопряженным. Формула (20.10) пригодна для отыскания главного члена асимптотики спектра A, а также, если для A_0 известны оценка остатка или второй член спектральной асимптотики, а оператор B достаточно мал, то она дает соответственно оценку остатка или второй член для $\tilde{N}(r; A)$.

В случае, когда оператор B лишь A_0-компактен, оценка (20.13) заменяется на неравенство

$$|\tilde{N}(r; A)-N(r; A_0)|\leqslant c_1(N(r(1+\varepsilon); A_0)-\\ -N(r(1-\varepsilon); A_0)+c_2, \qquad (20.14)$$

верное для любого $\varepsilon>0$ и для всех $r>r(\varepsilon)$. Кроме того, спектр оператора A вне любого угла $|\arg\lambda|<\theta$ конечен. Из (20.14) следует, в частности, что при довольно слабом условии регулярности функции $N(r; A_0)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\limsup_{r\to\infty} N(r(1+\varepsilon); A_0)/N(r; A_0))=1, \qquad (20.15)$$

справедливо соотношение

$$\tilde{N}(r; A)/N(r; A_0)\to 1.$$

Иными словами, при условии (20.15) главный член асимптотики спектра с. с. оператора A_0 не меняется при относительно компактных (не с. с.) возмущениях.

Условие (20.15) выполнено, например, если $N(r; A_0)\sim cr^{\alpha}$. Оно существенно слабее, чем, например, тауберово условие из теоремы 12.2. Как показано А. С. Маркусом и В. И. Мацаевым [105], при его нарушении асимптотика уже может не сохраняться.

Укажем в заключении этого п., что приведенные в нем результаты распространяются без существенных изменений на операторы вида A_0+B, получаемые при возмущении обратимого нормального оператора A_0 при условии, что спектр A_0 содержится в малой окрестности конечного числа лучей в $\mathbf{C}^1$ (см. [105]).

20.5. Применение к дифференциальным операторам. Для того, чтобы применять абстрактные результаты (в частности, теоремы 20.1—20.4) в конкретной ситуации, нужно иметь явные признаки требуемой этими теоремами малости несамосопряженного возмущения. Для операторов, рассмотренных в примерах 20.3, 20.4, такие признаки получаются достаточно просто, с использованием, в частности, результатов § 5 об оценках спектра. Приводимые ниже результаты, в основном содержатся в [1], [2], [104], [105].

В условиях примера 20.3 оператор A^{-1} отображает пространство $L_2(X)$ в $H^m(X)$; отсюда следует, что s-числа оператора A^{-1} мажорируется s-числами оператора вложения $H^m(X)$ в $L_2(X)$; таким образом, $s_j(A^{-1}) = O(j^{-m/n})$, $n = \dim X$. Такая же оценка верна для $s_j((A^{-1})^*) = s_j(A^{-1})$, поэтому, согласно теореме 20.2, если числовая область оператора A содержится в секторе в $\mathbf{C}^1$ с раствором, меньшим $\pi n/m$, то с. к. в. A полна.

Предположим теперь, что оператор A мало отличается от самосопряженного. Рассмотрим сначала эллиптический оператор на многообразии без края. Пусть $A = A_0 + B$, где $A_0 = A_0^* > 0$, $\operatorname{ord} A_0 = m$, B — д. о. порядка $m' < m$. Тогда A_0 — изоморфизм пространства $H^m(X)$ на $L_2(X)$, и оператор B является $A_0^{m'/m}$-ограниченным в $L_2(X)$. Отсюда следует, что

$$s_j(BA_0^{-1}) = s_j\left(BA_0^{-m'/m}A_0^{-1+m'/m}\right) = \\ = O\left(s_j\left(A_0^{-1}\right)^{1-m'/m}\right) = O\left(j^{-(m-m')/n}\right),$$

что обеспечивает требуемое теоремой 20.1 убывание s-чисел оператора BA_0^{-1} и, следовательно, полноту с. к. в. оператора A.

Далее, согласно теореме 20.3, при $m - m' \geqslant \dim X$ корневые векторы оператора A образуют базис Рисса со скобками, а при $m - m' < n$ разложение (20.2) суммируемо методом Абеля порядка $\alpha > 1 - (m - m')/n$.

Применяя далее к рассматриваемому оператору теорему 20.4, видим, что для оператора A имеет место спектральная асимптотика с оценкой остатка

$$\tilde{N}(\lambda; A) - a_0\lambda^{n/m} = O(\lambda^{(n-1)/m}), \quad \lambda \to +\infty,$$

где коэффициент a_0 — тот же, что у оператора A_0; кроме того, спектр A, за исключением конечного числа точек, содержится в области

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant c(\operatorname{Re}\lambda)^{m'/m}.$$

Если же для оператора A_0 известна двучленная асимптотическая формула

$$N(\lambda; A_0) = a_0\lambda^{n/m} + a_1\lambda^{(n-1)/m} + o(\lambda^{(n-1)/m}),$$

(например, если выполнены условия теоремы 13.4 либо 13.9) и $m' < m - 1$, то такая же двучленная асимптотика верна и для A.

С естественными изменениями эти результаты переносятся на случай неполуограниченных эллиптических операторов на X.

Для эллиптического оператора A, действующего на многообразии с краем, источник несамосопряженности может быть как в дифференциальном выражении, так и в граничном условии. Пусть $\mathscr{L}_0$ — равномерно эллиптическое д. в. порядка $m = 2k$, действующее на функции в области $X \subset \mathbf{R}^n$; B_j, $j \in \overline{1, k}$, — набор граничных операторов порядков m_j, $0 \leqslant m_1 < \ldots < m_k < m$, содержащих производную порядка m_j по нормали к границе, причем система $(\mathscr{L}_0, B_j)$ задает оператор регулярной эллиптической задачи и оператор

$$A_0 u = \mathscr{L}_0 u, \; D(A_0) = \{u \in H^m(X) : B_j u|_{\partial X} = 0 \;\; \forall j\}$$

самосопряжен и обратим в $L_2(X)$ (мы предполагаем для простоты, что все коэффициенты и граница — гладкие).

Пусть оператор A задан на области определения

$$D(A) = \{u \in H^m(X), \quad (B_j + B_j')\, u|_{\partial X} = 0 \;\; \forall j\}$$

выражением $Au = \mathscr{L}u = (\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}')\, u$, где $\mathscr{L}'$ — д. в. порядка $m' < m$, B_j' — граничные операторы порядков $m_j' < m_j$.

Применение теорем 20.1, 20.3, 20.4 затрудняется здесь тем обстоятельством, что области определения операторов A_0 и A различны. Однако, как показано в [104], можно построить оператор Σ непрерывно действующий из $H^s(X)$ в $H^{s+1}(X)$, $-1 \leqslant s \leqslant m-1$, так, что оператор $I-\Sigma$ обратим в $L_2(X)$ и отображает $D(A_0)$ на $D(A)$. Таким образом, $I-\Sigma$ осуществляет подобие операторов A и $\tilde{A} = A_0 + \tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$, хотя и не дифференциальный, действует из H^s в H^{s-m+1}. Если порядки m_j' граничных операторов B_j' удовлетворяют оценкам $m_j' \leqslant m_j - \mu$, $\mu > 1$, $j \in \overline{1, k}$, то упомянутая конструкция дает оператор Σ, непрерывно действующий из $H^s(X)$ в $H^{s+\mu}(X)$, $-\mu \leqslant s \leqslant m-\mu$, и тогда оператор $I - \Sigma$ осуществляет подобие операторов A $\tilde{A} = A_0 + \tilde{B}$, где $\tilde{B}: H^s \to H^{s-\tilde{m}}$, $\tilde{m} = \max(m', m-\mu)$.

Спектры подобных операторов совпадают, также совпадают и свойства сходимости спектральных разложений. Таким образом, на с. к. в. оператора эллиптической краевой задачи переносятся (с заменой m' на $\tilde{m}$) утверждения, сформулированные выше для случая оператора на многообразии без края.

Рассмотрим в заключение оператор Шрёдингера с растущим по модулю комплексным потенциалом. Предположим, что в условиях примера 20.1 $V_1 = o(V_0)$, $|x| \to \infty$. Тогда оператор T, определяемый соотношением (20.6), компактен в $d[a_0]$, иными словами — оператор $B: u \mapsto V_1 u$ является A_0-компактным в смысле форм. Поскольку $s_j\left(A_0^{-1/2} T A_0^{-1/2}\right) = O\left(s_j\left(A_0^{-1}\right)\right)$, условия теоремы 20.1 выполнены, например, если $V_0(x) \geqslant c\,(1 + |x|^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; при этих условиях с. к. в. оператора A полна. Предположим далее что $V_1 = O\left(V_0^p\right)$, $0 < p < 1$. Тогда

$$\int |V_1|\, |u|^2 dx \leqslant \left(\int |V_1|^{1/p} |u|^2 dx\right)^p \left(\int |u|^2 dx\right)^{1-p} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(a_0[u])^p \|u\|^{2-2p}.$$

Таким образом, квадратичная форма возмущения p-подчинена A_0. Применяя теперь теоремы 20.3, 20.4, получаем конкретные результаты о сходимости спектральных разложений и о расположении спектра оператора Шрёдингера.

Применение теоремы 20.2 в рассматриваемой ситуации проиллюстрируем на примере оператора Шрёдингера $A=-\Delta+ +V_0+iV_1$, где $V_1>0$, $V_1\leqslant bV_0$. Числовая область оператора A содержится в секторе с раствором π/p, $p=\pi/\operatorname{arctg} b$, поэтому для полноты с. к. в. достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_j s_j^p(A^{-1})\leqslant c\sum_j s_j^p(A_0^{-1})$. Предположим, что $n\geqslant 3$. Тогда, как следует из оценки (5.11),

$$\sum_j s_j^p(A_0^{-1})=\int_0^\infty \lambda^{-p}dN(\lambda;\,A_0)\leqslant c\int (V_0(x))^{-p+n/2}dx,\quad 2p>n.$$

Таким образом, если

$$V_0^{-p+n/2}\in L_1(\mathbf{R}^n),\quad n\geqslant 3, \tag{20.16}$$

то с. к. в. оператора Шрёдингера полна. При отказе от условия $V_1>0$ в (20.16) следует заменить p на $p/2$.

Литература по различным аспектам спектральной теории необозрима. В приведенном ниже списке указаны лишь основные монографии, обзоры, а также относящиеся к затронутым проблемам статьи, содержащие наиболее принципиальные результаты.

Результаты, полученные к началу 60-х годов, отражены в книгах [15], [49], [208], [345], [222]. Книги, содержащие материал по теории обыкновенных дифференциальных операторов: [85], [99], [108], [121], [202], [264]. Применяемые в спектральной теории методы функционального анализа, и в первую очередь теория операторов в гильбертовом пространстве, изложены в [8], [27], [53], [222] [268], [283], [312]. С основными функциональными пространствами и теоремами вложения можно познакомиться в [122]; материал, относящийся к негладким и неограниченным весам, областям и т. п. имеется в [101], [119].

Классическая теория краевых задач для уравнений в частных производных изложена в [280]. Современные достижения для этих задач связаны с появлением аппарата псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Взаимно дополняющие изложения этого материала с многочисленными приложениями, в частности, к спектральной теории, имеются в [162], [240], [342], [346]; наиболее продвинутая теория дана в [254], см. также [64], [65] и указанную там литературу. Родственный ИОФ метод канонического оператора, используемый для построения приближенных собственных функций (квазимод), изложен в [110]—[113], другие асимптотические методы построения квазимод рассмотрены в [10], [87], [88], [204]. Материал по абстрактной теории возмущений дискретного спектра имеется в [228], [268], применения к асимптотическим проблемам д. о. даны в [44], [120], [312]. Вопросы теории осреднения в спектральных задачах рассмотрены в [301], [317].

Ряд книг и статей посвящен анализу специальных классов операторов. Наряду с регулярными краевыми задачами, наиболее интересный пример — это оператор Шрёдингера, рассматривающийся в [16], [213] и, в особенности, [312]. Специально многочастичному оператору Шрёдингера посвящены книги [114] (теория рассеяния), [118], [265] и статья [167]. По поводу многомерного оператора Дирака см. [172]. Теории операторов с периодическими и почти-периодическими коэффициентами посвящены книги и обзоры [143], [164], [165], [223], [262]. С современным состоянием теории случайных операторов можно ознакомиться в [100], [127], [130], [195], [254], [305], [335].

Весьма богата литература по спектральным асимптотикам. Обзор [200] описывает состояние предмета на 1967 г., обзор [24] — на 1975 г. Вариационный метод наиболее подробно изложен в [23], резольвентный метод для разных задач — в [85], [169], метод параболического уравнения — в [83], [238], [115], [342], [333]; о методе ζ-функции см. [162], [318]. Обзоры по прямым и обратным результатам спектральной геометрии см. в [186], [187], [332]. Метод приближенного спектрального проектора изложен в [162], [279], его применение к невейлевским асимптотикам дано в [94]. Наиболее продвинутые результаты, полученные с помощью метода гиперболического уравнения, имеются в [221], [181], книге В. Я. Иврия [260] и его более поздних работах [70], [71], [72], [261], а также в [37], [140], [141], [254].

Проблема «можно ли услышать форму барабана?» была сформулирована Кацем в [267], а для компактных римановых поверхностей — И. М. Гельфандом [233]. Наиболее существенные результаты об однозначности или неоднозначности восстановления дифференциального оператора по его дискретному спектру см. в [186], [192], [284], [241], [347], [237]. Теория дискретных групп изометрий изложена в [43]. Теория операторов, слабо отличающихся от самосопряженных, имеется в [53], [1], [2], [105].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции. В кн.: *Войтович Н. Н., Каценеленбаум В. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.— М.: Наука, 1977.— С. 289—416.
2. — О сходимости рядов по корневым векторам операторов, близких к самосопряженным // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1980.— *41*.— С. 163—186.
3. —, *Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук.— 1964.— *19*, № 3.— С. 53—161.
4. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1985.— *1*.— С. 151—242.
5. *Арнольд В. И.* Моды и квазимоды // Функц. анал. и его прил.— 1972.— *6*, № 2.— С. 12—20.
6. —, *Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1985.— *3*.— С. 5—300.
7. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругнх оболочек.— М.: Наука, 1974.— 182 с.
8. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.— 543 с.
9. *Бабич В. М.* Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа—Бельтрами // Зап. науч. семин. Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1979.— *89*.— С. 15—53.
10. — Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1987.— *34*.— С. 93—134.
11. *Безяев В. И.* Асимптотика плотности состояний гипоэллиптических почти-периодических операторов // Мат. сб.— 1978.— *105*, № 4.— С. 485—511.
12. — Асимптотика собственных значений гипоэллиптических операторов на замкнутом многообразии // Мат. сб.— 1982.— *117*, № 2.— С. 161—180.
13. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Оценки размеров лакун в спектре // Теор. и мат. физ.— 1975.— *25*, № 3.— С. 344—357.
14. — Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Зависимость энергии от квазиимпульса // Теор. и мат. физ.— 1976.— *26*, № 1. — С. 35—41.
15. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.— 798 с.
16. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шрёдингера.— М.: МГУ, 1983.— 368 с.
17. *Бикташев Р. А., Мищенко А. С.* О спектрах эллиптических неограниченных псевдодифференциальных операторов над C^*-алгебрами // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1980.— № 3.— С. 56—58.
18. *Бирман М. Ш.* О спектре операторов Шрёдингера н Дирака // Докл. АН СССР.— 1959.— *129*, № 2.— С. 239—241.
19. —. О спектре сингулярных граничных задач // Мат. сб.— 1961.— *55*, № 2.— С. 125—174.
20. —. Возмущение непрерывного спектра эллиптических операторов при изменении границы и граничных условий // Вестн. ЛГУ. Мат.— 1962.— № 1.— С. 22—55.
21. —, *Соломяк М. З.* О главном члене спектральной асимптотики для негладких эллиптических задач // Функц. анал. и его прил.— 1970.— *4*, № 4.— С. 1—13.
22. —, — Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1972.— *27*.— С. 3—52; 1973.— *28*.— С. 3—34.
23. —, — Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории // Десятая математическаи школа.— Киев.: Наукова думка, 1974.— С. 5—189.

24. —, — Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ.— 1977.— *14*.— С. 5—58.
25. —, — Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородным символом // Вестн. ЛГУ. Мат., мех.— 1977.— № 13.— С. 13—21.
26. —, — Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений // Сиб. мат. ж.— 1979.— *20*, № 1.— С. 3—22.
27. —, — Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— Л.: ЛГУ, 1980.— 264 с.
28. —, — Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических систем // Зап. науч. семин. Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1982.— *115*.— С. 23—35.
29. —, — Асимптотика спектра псевдодифференциальных вариационных задач со связями // Пробл. мат. физ.— 1982.— *10*.— С. 20—36.
30. *Богородская Т. Е., Шубин М. А.* Вариационный принцип и асимптотическое поведение плотности состояний для случайных псевдодифференциальных операторов // Тр. семин. им. И. Г. Петровского.— 1986.— *11*.— С. 98—117.
31. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра оператора Шрёдингера // Дифференц. уравнения.— 1974.— *10*, № 11.— С. 1939—1945.
32. — Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— *170*.— С. 37—76.
33. *Буслаев В. С.* Об асимптотическом поведении спектральных характеристик внешних задач для оператора Шрёдингера // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— *39*, № 1.— С. 149—235.
34. *Вайнберг Б. Р.* Об асимптотическом разложении спектральной функции эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ // Тр. семинаров им. И. Г. Петровского. — 1987.— *12*.— С. 75—87.
35. — Асимптотическое поведение при $t\to\infty$ решений внешних смешанных задач для гиперболических уравнений и квазиклассика // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1987.— *4*.— С. 57—92.
36. *Васильев Д. Г.* Двучленная асимптотика спектра краевой задачи при внутреннем отражении общего вида // Функц. анал. и его прил.— 1984. — *18*, № 4.— С. 1—13.
37. — Асимптотика спектра краевой задачи // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1986. — *49*.— С. 167—237.
38. —, *Сафаров Ю. Г.* Ветвящиеся гамильтоновы биллиарды // Докл. АН СССР— 1988.— *301*, № 2.— С. 271—275.
39. *Велиев О. А.* Асимптотические формулы для собственных чисел периодического оператора Шрёдингера и гипотеза Бете—Зоммерфельда // Функц. анализ и его прил.— 1987.— *21*, № 2.— С. 1—15.
40. *Венков А. Б.* Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, № 3.— С. 69—135.
41. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов.— М.: Наука, 1975.— 320 с.
42. —, *Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.— 424 с.
43. *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1988.— *29*.— С. 147—259.
44. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.— 1960.— *15*, № 3.— С. 3—80.
45. *Воловой А. В.* Улучшенная двучленная асимптотика функции распределения собственных значений эллиптического оператора на компактном многообразии // Докл. АН СССР.— 1987.— *294*, № 5.— С. 1037—1041.

46. *Вулис И. Л.* Спектральная асимптотика эллиптических операторов произвольного порядка с сильным вырождением // Записки науч. семин. Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— *59*.— С. 25—30.
47. —, *Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974. — *38*, № 6.— С. 1362—1392.
48. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1950.— *73*, № 6.— С. 1117—1120.
49. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М.: Физматгиз, 1963.— 340 с.
50. *Гольдшейд И. Я., Молчанов С. А., Пастур Л. А.* Случайный оператор Шрёдингера имеет чисто точечный спектр // Функц. анал. и его прил.— 1977.— *11*, № 1.— С. 1—10.
51. *Гордон А. Я.* О точечном спектре одномерного оператора Шрёдингера // Успехи мат. наук.— 1976.— *31*, № 4.— С. 257—258.
52. — О непрерывном спектре одномерного оператора Шрёдингера // Функц. анал. и его прил.— 1979.— *13*, № 3.— С. 77—78.
53. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М.: Наука, 1965.— 448 с.
54. *Гренкова Л. Н.* О существенной самосопряженности оператора Шрёдингера со случайным потенциалом // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, № 6 — С. 211—212.
55. —, *Молчанов С. А.* Асимптотика липшицевых «хвостов» для случайных одномерных систем // Функц. анал. и его прил.— 1988.— *22*, № 2.— С. 73—74.
56. *Гуреев Т. Е., Сафаров Ю. Г.* Точная асимптотика спектра оператора Лапласа на многообразии с периодическими геодезическими // Мат. ин-та АН СССР. Тр.— 1988.— *179*.— С. 36—53.
57. *Гусев А. И.* Плотность состояний и другие спектральные инварианты самосопряженных эллиптических операторов со случайными коэффициентами // Мат. сб.— 1977.— *104*, № 2.— С. 207—226.
58. —, *Шубин М. А.* Эллиптические операторы со случайными коэффициентами // Предельные теоремы для случайных процессов / Ин-т мат. АН УССР.— 1977.— С. 93—107.
59. *Дедик П. Е., Шубин М. А.* Случайные псевдодифференциальные операторы и стабилизация решений параболических уравнений со случайными коэффициентами // Мат. сб.— 1980.— *113*, № 1.— С. 41—64.
60. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом // Функц. анал. и его прил.— 1975.— *9*, № 4.— С. 8—21.
61. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1985.— *4*.— С. 179—284.
62 *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.— 860 с.
63. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* Об оценке числа точек отрицательного спектра оператора Шрёдингера // Мат. сб.— 1987.— *134*, № 4.— С. 556—570.
64. —, *Шубин М. А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1988.— *30*.— С. 1—262.
65. —, — Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления.— 1988.— *31*.— С. 1—125.
66. *Желудев В. А.* О возмущении спектра одномерного самосопряженного оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом // Пробл. мат. физ.— 1987.— *4*.— С. 61—82.

67. *Захаров В. Е. Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980— 320 с.
68. *Иврий В. Я.* О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа—Бельтрами на многообразии с краем // Функц. анал. и его прил.— 1980.— *14*, № 2.— С. 25—34.
69. — О точных спектральных асимптотиках для эллиптических операторов, действующих в расслоениях // Функц. анализ и его прил.— 1982.— *16*, № 2.— С. 30—38.
70. — Об асимптотиках дискретного спектра для некоторых операторов в $\mathbb{R}^n$ // Функц. анал. и его прил.— 1985.— *19*, № 1.— С. 73—74.
71. — Асимптотическая формула Вейля для оператора Лапласа—Бельтрами в римановых многогранниках и в областях с коническими особенностями границы // Докл. АН СССР.— 1986.— *288*, № 1.— С. 35—38.
72. — Оценки для числа собственных значений оператора Шрёдингера с сильным магнитным полем // Докл. АН СССР.— 1987.— *297*, № 5.— С. 1043—1046.
73. *Кароль А. И.* О ζ-функции вырождающейся эллиптической краевой задачи // Докл. АН СССР.— 1981.— *260*, № 1.— С. 20—22.
74. *Киселев В. Ю.* Почти-периодические интегральные операторы Фурье и некоторые их приложения // Тр. семин. им. И. Г. Петровского.— 1978.— *3*.— С. 81—97.
75. *Кожевников А. Н.* Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу, и их приложения // Мат. сб.— 1973.— *92*, № 1.— С. 60—88.
76. *Козлов В. А.* Оценки остатка в формулах асимптотики спектра для линейных операторных пучков // Функц. анал. и его прил.— 1983.— *17*, № 2.— С. 80—81.
77. *Козлов С. М.* Распределение собственных значений дифференциальных операторов в больших областях // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 5.— С. 185—186.
78. — Приводимость квазипериодических дифференциальных операторов и усреднение // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1983.— *46*.— С. 99—123.
79. —, *Шубин М. А.* О совпадении спектров случайных эллиптических операторов // Мат. сб.— 1984.— *123*, № 4.— С. 460—476.
80. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук.— 1983.— *38*, № 2.— С. 3—76.
81. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— 385 с.
82. *Костюченко А. Г.* Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1966.— *168*, № 1.— С. 21—24.
83. — Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов // Четвертая математическая школа. Киев: Наукова думка, 1968.— С. 42—117.
84. —, *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма—Лиувилля // Функц. анал. и его прил.— 1967.— *1*, № 1.— С. 86—96.
85. —, *Саргсян И. С.* Распределение собственных значений.— М.: Наука, 1979.— 400 с.
86. *Кучмент П. А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 4.— С. 3—52.
87. *Лазуткин В. Ф.* Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа.— Л.: ЛГУ, 1981.— 196 с.
88. — Квазиклассическая асимптотика собственных функций // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр.— 1987.— *34*.— С. 135—174.
89. *Лаптев А. А.* Спектральная асимптотика одного класса интегральных операторов Фурье // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1981.— *43*.— С. 92—115.

90. *Левендорский С. З.* Асимптотическое распределение собственных значений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— *46*, № 4.— С. 810—852.
91. —Асимптотика спектра линейных операторных пучков // Мат. сб.— 1984.— *124*, № 2.— С. 251—271.
92. — Метод приближенного спектрального проектора // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— *49*, № 6.— С. 1177—1229.
93. — Асимптотика спектра задач со связями // Мат. сб.— 1986.— *129*, № 1.— С. 73—84.
94. — Неклассические спектральные асимптотики // Успехи мат. наук.— 1988.— *43*, № 1.— С. 123—157.
95. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральиой функции самосопряжеиного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1952.— *16*, № 1.— С. 325—352.
96. —Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения // Успехн мат. наук.— 1971.— *26*, № 6.— С. 151—212.
97. —, *Отелбаев М. О.* Об условиях самосопряжеиности операторов Шрёдингера и Днрака // Докл. АН СССР.— 1977.— *235*, № 4.— С. 768—771.
98. —, *Савин А. В.* Примеры операторов Шрёдингера с почти-периодическими потенцналами и нигде не плотным абсолютно непрерывным спектром // Докл. АН СССР.— 1984.— *276*, № 3.— С. 539—542.
99. —, *Саргсян И. С.* Введение н спектральную теорию.— М.: Наука, 1970.— 672 с.
100. *Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.* Введение в теорию иеупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.— 358 с.
101. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева.— Л.: ЛГУ, 1985.— 416 с.
102. —, *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиямн // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— *48*, № 2.— С. 347—371.
103. *Малоземов Л. А.* О собственных значениях возмущенного почтн периодического оператора, погруженных в непрерывный спектр // Успехи мат. наук.— 1988.— *43*, № 4.— С. 211—212.
104. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Операторы, порожденные полуторалинейными формами и их спектральиые асимптотикн // Линейные операторы и интегральные уравнеиия. Кншинев: Штиинца.— 1981.— С. 86—103.
105. —, — Теоремы сравнеийя спектров линейиых операторов и спектральные асимптотики // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1982.— *45*.— С. 133—181.
106. *Марченко А. В.* Об аппроксимации спектра эллиптнческого оператора с почти-периодическимн коэффициентами // Мат. заметки.— 1979.— *25*, № 5.— С. 713—724.
107. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега — де Фриза // Мат. сб.— 1974.— *95*, № 3.— С. 331—356.
108. — Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.— 332 с.
109. —, *Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб.— 1975.— *97*, № 4.— 540—606.
110. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ и нелинейные уравнения.— М.: Наука, 1976.— 384 с.
111. — Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1987.— 408 с.
112. — Аснмптотические методы и теория возмущений.— М.: Наука, 1988.— 310 с.
113. —, *Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.— 296 с.
114. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.— М.: Наука, 1985.— 398 с.
115. *Молчанов С. А.* Диффузионные процессы и риманова геометрия // Успехи мат. наук.— 1975.— *30*, № 1.— С. 3—59.
116. — Строение собственных функций одномерных неупорядоченных структур // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— *42*, № 11.— С. 70—103.

117. —, *Чулаевский В. А.* Структура спектра лакунарио-предельно-периодического оператора Шрёдингера // Функц. анал. и его прил.— 1984.— *18*, № 4.— С. 90—91.
118. *Муртазин X. X., Садовничий В. А.* Спектральный анализ многочастичного оператора Шрёдингера.— М.: МГУ, 1988.— 229 с.
119. *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов.— М.: Наука, 1988.— 284 с.
120. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения собственных чисел.— Л.: ЛГУ, 1987.— 109 с.
121. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 526 с.
122. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 455 с.
123. *Новиков С. П.* Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения.— 1983.— *23*.— С. 3—32.
124. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1968.— *19*.— С. 179—210.
125. *Павлов Б. С. Шушков А. А.* Теория расширений и потенциалы «нулевого» радиуса с внутренней структурой // Мат. сб.— 1988.— *137*, № 2.— С. 147—183.
126. *Пастур Л. А.* Самоусредняемость числа состояний уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом // Мат. физика и функц. анализ. Сб. тр. ФТИНТ АН УССР.— 1971.— *2*.— С. 111—116.
127. — Спектры случайных самосопряженных операторов // Успехи мат. наук.— 1973.— *28*, № 1.— С. 3—64.
128. — О спектре случайных якобиевых матриц и оператора Шрёдингера на всей оси со случайным потенциалом // ФТИНТ АН УССР. Харьков. Препр.— 1974.— 18 с.
129. — Поведение некоторых винеровских интегралов при $t\to\infty$ и плотность состояний уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом // Теор. и мат. физ.— 1977.— *32*, № 1.— С. 88—95.
130. — Спектральная теория случайных самосопряженных операторов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика.— 1987.— *25*.— С. 3—67.
131. *Розенблюм Г. В.* Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1972.— *202*, № 5.— С. 1012—1015.
132. — О собственных числах первой краевой задачи в неограниченных областях // Мат. сб. 1972.— *89*, № 2.— С. 234—247.
133. — Асимптотика собственных чисел оператора Шрёдингера // Мат. сб.— — 1974.— *93*, № 3.— С. 346—367.
134. — Замечания об оценках спектра дифференциальных операторов / Тр. 6-й зимн. школы по мат. программ. и смежн. вопр. Дрогобыч, 1973. Функциональный анализ и его примен.— М.: ЦЭМИ, 1975.— С. 236—244.
135. — Асимптотика отрицательного дискретного спектра оператора Шрёдингера // Мат. заметки.— 1977.— *21*, № 5.— С. 399—407.
136. *Ройтбурд В. Л.* О квазиклассической асимптотике спектра псевдодифференциального оператора // Успехи мат. наук.— 1976.— *31*, № 4.— С. 275—276.
137. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Константы типа Киезера и эффективные массы для зонных потенциалов // Докл. АН СССР.— 1984.— *276*, № 2.— С. 356—359.
138. *Савин А. В.* Асимптотическое разложение плотности состояний для одномерных операторов Шрёдингера и Дирака с почти-периодическими и случайными потенциалами // Сб. научн. трудов ИФТП. М.— 1988.

139. *Сафаров Ю. Г.* Асимптотика спектра псевдодифференциального оператора с периодическими бихарактеристиками // Зап. науч. семин. Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— *152*.— С. 94—104.
140. — Асимптотика спектральной функции положительного эллиптического оператора без условия неловушечности // Функц. анал. и его прил.— 1988.— *22*, № 3.— С. 53—65.
141. — Точная асимптотика спектра краевой задачи и периодические биллиарды // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— *52*, № 6.— С. 1230—1251.
142. *Синай Я. Г.* О структуре спектра разностного оператора Шрёдингера с почти периодическим потенциалом около левого края // Функц. анал. и его прил.— 1985.— *19*, № 1.— С. 42—48.
143. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985.— *171*.— С. 1—122.
144. *Сливняк И. М.* О спектре оператора Шрёдингера со случайным потенциалом // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1966.— *6*, № 6.— С. 1104—1108.
145. *Смагин С. А.* Дробные степени гипоэллиптических систем в $\mathbf{R}^n$ // Мат. сб.— 1976.— *99*, № 3.— С. 331—341.
146. *Соломяк М. З.* Асимптотика спектра оператора Шрёдингера с нерегулярным однородным потенциалом // Мат. сб.— 1985.— *127*, № 1.— С. 21—39.
147. *Туловский В. Н.* Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Функц. анал. и его прил.— 1971.— *5*, № 3.— С. 85—100.
148. —, *Шубин М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$ // Мат. сб.— 1973.— *93*, № 4.— С. 571—588.
149. *Федосов Б. В., Шубин М. А.* Индекс случайных эллиптических операторов // Мат. сб.— 1978.— *106*, № 1.— С. 108—140; № 3.— С. 455—483.
150. *Фейгин В. И.* Асимптотическое распределение собственных значений для гипоэллиптических систем в $\mathbf{R}^n$ // Мат. сб.— 1976.— *99*, № 4.— С. 594—614.
151. — Новые классы псевдодифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$ и некоторые приложения // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1978.— *36*.— С. 155—194.
152. — Асимптотическое распределение собственных чисел и формула типа Бора—Зоммерфельда // Мат. сб.— 1979.— *110*, № 1.— С. 66—87.
153. *Фиготин А. Л.* Существенная самосопряженность и эргодические свойства оператора Шрёдингера со случайным потенциалом // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 8.— С. 18—20.
154. *Фирсова Н. Е.* Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла // Мат. сб.— 1986.— *130*, № 3.— С. 349—385.
155. *Чулаевский В. А.* О возмущениях оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, № 5.— С. 203—204.
156. *Шенк Д., Шубин М. А.* Асимптотическое разложение плотности состояний и спектральной функции оператора Хилла // Мат. сб.— 1985.— *128*, № 4.— С. 474—491.
157. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс.— М.: Физматгиз, 1961.— 463 с.
158. *Шубин М. А.* Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы в пространствах почти-периодических функций // Мат. сб.— 1974.— *95*, № 4.— С. 562—589.
159. — О существенной самосопряженности равномерно гипоэллиптических операторов // Вест. Моск. ун-та. Сер. Мат., мех.— 1975.— № 2.— С. 91—94.
160. — Теоремы о совпадении спектров псевдодифференциального почти периодического оператора в пространствах $L_2(\mathbf{R}^n)$ и $B_2(\mathbf{R}^n)$ // Сиб. мат. ж.— 1976.— *17*, № 1.— С. 200—215.

161. — Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1976.— *35*.— С. 103—164.
162. — Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М.: Наука, 1978.— 279 с.
163. — Плотность состояний для самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами // Тр. семинаров им. И. Г. Петровского.— 1978.— *3*.— С. 243—275.
164. — Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук.— 1978.— *33*, № 2.— С. 3—47.
165. — Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, № 2.— С. 95—135.
166. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1970.— *23*. —С. 179—234.
167. *Яфаев Д. Р.* О дискретном спектре трехчастичного оператора Шрёдингера // Докл. АН СССР.— 1972.— *206*, № 1.— С. 68—70.
168. — О точечном спектре в квантовомеханической задаче многих тел // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976.— *40*, № 4.— С. 908—948.
169. *Agmon S.* On kernels, eigenvalues and eigenfunctions related to elliptic problems // Commun. Pure and Appl. Math.— 1965.— *18*, № 4.— С. 627—663.
170. — Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1968.— *28*, № 3.— С. 165—183.
171. *Anderson P. W.* Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev.— 1958.— *109*.— С. 1492—1505.
172. *Arai M.* On essential selfadjointness, distinguished selfadjoint extention and essential spectrum of Dirac operators with matrix potentials // Publ. RIMS, Kyoto Univ.— 1983.— *19*, № 1.— S. 33—57.
173. *Aramaki J.* Complex powers of a class of pseudodifferential operators and their applications // Hokkaido Math. J.— 1983.— *12*, № 2.— С. 199—225.
174. — On the asymptotic behavior of the spectra of quasi-elliptic pseudodifferential operators on $\mathbf{R}^n$ // Tokyo J. Math.— 1987.— *10*, № 2.— С. 481—505.
175. *Avron J. S., Simon B.* Analytic properties of band functions // Ann. Phys. (USA).— 1978.— *110*, № 1.— С. 85—101.
176. —, — Almost periodic Hill's equation and the rings of Saturn // Phys. Rev. Lett.— 1981.— *46*, № 17.— С. 1166—1168.
177. —, — Almost periodic Schrödinger operators I. Limit periodic potentials // Commun. Math. Phys.— 1982.— *82*.— С. 101—120.
178. —, — Almost periodic Schrödinger operators II. The integrated density of states // Duke Math. J.— 1983.— *50*, № 1.— С. 369—391.
179. *Baaj Saad.* Calcul pseudodifferentiel et produits croisés de C^*-algèbres.— Preprint, 1987.— 11 с.
180. *Bando S., Urakawa H.* Generic properties of the eigenvalues of the Laplacian for compact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.— 1983.— № 1.— С. 155—172.
181. *Bardos C., Guillot J., Ralston J.* Relation de Poisson l'équation des ondes dans un ouvert non borné // Commun. Part. Differ. Equat.— 1982.— *7*, № 8.— С. 905—995.
182. *Beals R., Fefferman C.* Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators // Commun. Pure and Appl. Math.— 1974.— *27*, № 1.— С. 1—24.
183. *Bellissard J., Lima R., Scoppola E.* Localization in ν-dimensional incommensurate structures // Commun. Math. Phys.— 1983.— *88*, № 4.— С. 465—477.
184. *Bérard P. H.* On the wave equation on a compact manifold without conjugate points // Math. Z.— 1977.— *155*, № 2.— С. 249—273.

185. — Spectre et groupes cristallographiques I. Domains Euclidiens. // Inv. Math.— 1980.— *58*, № 2.— С. 179—199; II. Domains sphériques // Ann. Inst. Fourier.— 1980.— *30*, № 3.— С. 237—248.
186. — Spectral geometry: direct and inverse problems // Lect. Notes Math.— 1986.— *1207*.— С. 1—272.
187. *Berger M., Gaudouchon P., Mazet E.* Le spectre d'un variété Riemannien // Lect. Notes Math.— 1971.— *194*.— С. 1—251.
188. *Berry J.-P.* Tores isospectrales de dimension 3 // C. r. Acad. sci.— 1981.— *192*, № 2.— С. 163—165.
189. *Besse A.* Manifolds all of whose geodesics are closed.— Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer Verlag, 1978 (Пер. на рус. яз.: *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими.— М.: Мир, 1981.— 326 с.).
190. *Boutet de Monvel L., Guillemin V.* The spectral theory of Toeplitz operators.— Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1981.— 160 с.
191. *Bovier A., Campanino M., Klein A., Perez J. F.* Smoothness of the density of states in the Anderson model at high disorder // Commun. Math. Phys.— 1988.— *114*.— С. 439—461.
192. *Buser P.* Isospectral Riemannian surfaces // Ann. Inst. Fourier.— 1986.— *36*, № 2.— С. 167—192.
193. *Carleman T.* Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen // Ber. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig.— 1936.— *88*.— С. 119—132.
194. *Carmona R.* Exponential localization in one dimensional disordered systems // Duke Math. J.— 1982.— *49*, № 1.— С. 191—213.
195. — Random Schrödinger operators // École d'Eté de Probabilités XIV, Saint Flour.— 1984.— С. 1—123.
196. — One-dimensional Schrödinger operators with random potentials: a survey // Acta Appl. Math.— 1985.— *4*, № 1.— С. 65—91.
197. *Chazarain J.* Construction de la paramétrix du problème mixte hypérbolique pour l'équation des ondes // C. r. Acad. sci.— 1973.— *277*, № 9.— С. 1213—1215.
198. — Formule de Poisson pour les variétés Riemannienes // Invent. math.— 1974.— *24*, № 1.— С. 65—82.
199. — Spectre d'un hamiltonien quantique et méchanique classique // Commun. Part. Differ. Equat.— 1980.— *5*, № 6.— С. 595—644.
200. *Clark C.* The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems // SIAM Rev.— 1967.— *9*, № 4.— С. 627—646.
201. *Coburn L. A., Moyer R. D., Singer I. M.* C^*-algebras of almost periodic pseudodifferential operators // Acta math.— 1973.— *130*, № 3—4.— С. 279—307.
202. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations.— McGrow-Hill, 1955.— 429 с. (Пер. на рус. яз.: *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкиовенных дифференциальных уравиений.— М.: ИЛ, 1958.— 474 с.).
203. *Colin de Verdie Y.* Spectre du laplacien et longeurs des géodesiques périodiques // Compos. math.— 1973.— *27*, № 1.— С. 83—106; № 2.— С. 159—184.
204. — Quasi-modés sur les variétés Riemanniens compactes // Invent. math.— 1977.— *43*, № 1.— С. 15—52.
205. — Su le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques // Comment. math. helv.— 1979.— *54*, № 3.— С. 508—522.
206. — Pseudo-laplaciens // Ann. Inst. Fourier.— 1982.— *32*, № 3.— С. 275—286; 1983.— *33*, № 2.— С. 87—113.
207. *Combes J. N., Briet P., Duclos P.* Spectral properties of Schrödinger operators with trapping potential in the semiclassical limit // Lect. Notes Math.— 1987.— *1285*.— С. 55—82.
208. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. I.— N. Y.: Interscience, 1953. (Пер. на рус. яз.: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. I.— М.: ГТГИ, 1951).

209. *Craig W.* Pure point spectrum for discrete almost periodic Schrödinger operators // Commun. Math. Phys.— 1983.— *88*, № 1.— С. 113—131.
210. —, *Simon B.* Log Hölder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices // Commun. Math. Phys.— 1983.— *90*, № 2.— С. 207—218.
211. —, — Subharmonicity of the Ljapunov index // Duke J. Math.— 1983.— *50*, № 4.— С. 551—560.
212. *Cramer H., Leadbetter M. R.* Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications.— N. Y., London, Sydney: John Wiley, 1967 (Пер. на рус. яз.: *Крамер Г., Лидбеттер М. Р.* Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения.— М.: Мир, 1969.— 389 с.).
213. *Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B.* Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.— Berlin: Springer, 1987.— 319 с.
214. *Deift P., Simon B.* Almost periodic Schrödinger operators. III. The absolutely continuous spectrum in one dimension // Commun. Math. Phys.— 1983.— *90*.— С. 389—411.
215. *Delyon F., Levy Y., Souillard B.* Anderson localization for multidimensional systems at large disorder or low energy // Commun. Math. Phys.— 1985.— *100*, № 4.— С. 463—470.
216. —, —, — Anderson localization for quasi one-dimensional systems // J. Statist. Phys.— 1985.— *41*, № 3—4.— С. 375—388.
217. —, —, — Approach à la Borland to multidimensional localization // Phys. Rev. Lett.— 1985.— *55*, № 6.— С. 618—621.
218. *Dixmier J.* Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann).— Paris: Gauthier-Villars, 1969.
219. *Donsker M. N., Varadhan S. R. S.* Asymptotics for the Wiener sausage // Commun. Pure and Appl. Math.— 1975.— *28*, № 4.— С. 525—565.
220. *Driscoll B. H.* Eigenvalues on a domain with discrete rotational symmetry // SIAM J. Math. Anal.— 1987.— *18*, № 4.— С. 941—953.
221. *Duistermaat J. J., Guillemin V.* The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics // Invent. math.— 1975.— *29*, № 1.— С. 37—79.
222. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. II. Spectral theory.— N. Y., London: Interscience, 1963 (Пер. на рус. яз.: *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. II. Спектральная теория.— М.: Мир, 1966.— 1098 с.).
223. *Eastham M. S. P.* The spectral theory of periodic differential equations.— Edinburgh, London: Scott. Acad. Press, 1973.
224. *Elliott G. A.* Gaps in the spectrum of an almost periodic Schrödinger operator // C. r. Math. Rep. Acad. sci. Canada.— 1982.— *4*.— С. 255—259.
225. *Eskin G., Ralston J., Trubowitz N.* The multidimensional inverse spectral problem with a periodic potential // Contemp. Math.— 1986.— *27*.— С. 45—56.
226. *Fefferman C. L.* The uncertainty principle // Bull. Amer. Math. Soc.— 1983.— *9*, № 2.— С. 129—206.
227. —, *Phong D.* On the asymptotic eigenvalue distribution of a pseudodifferential operator // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1980.— *77*, № 10.— С. 5622—5625.
228. *Friedrichs K. O.* Perturbation of spectra in Hilbert space.— Providence R. I.: AMS, 1965 (Пер. на рус. яз.: *Фридрихс К. О.* Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1969.— 232 с.).
229. *Froese R., Herbst I.* A new proof of the Mourre estimate // Duke Math. J.— 1982.— *49*, № 4.— С. 1075—1085.
230. *Fröhlich J., Martinelli F., Scoppola E., Spencer T.* Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model // Commun. Math. Phys.— 1985.— *101*, № 1.— С. 21—46.

231. —, *Spencer T.* Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy // Commun. Math. Phys.— 1983.— *88*, № 2.— C. 151—184.
232. —, — A rigorous approach to Anderson localization // Phys. Report.— 1984.— *103*, № 1—4.— C. 9—25.
233. *Gelfand I. M.* Automorfic functions and theory of representations // Proc. of Stockholm Math. Congress 1962.— Stockholm, 1963.— C. 74—85.
234. *Geymonat G., Grubb G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Ann.— 1977.— *225*.— C. 247—276.
235. *Gilkey P.* Spectral geometry of a Riemannian manifold // J. Differ. Geom.— 1975.— *10*, № 4.— C. 601—618.
236. —, *Smith L.* The eta-invariant for a class of elliptic boundary value problems // Commun. Pure and Appl. Math.— 1983.— *36*, № 1.— C. 85—131.
237. *Gordon C. S., Wilson E. N.* Isospectral deformation of compact solvmanifolds // J. Differ. Geom.— 1984.— *19*, № 1.— C. 241—256.
238. *Greiner P.* An asymptotic expansion for the heat equation // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1971.— *41*, № 3.— C. 163—218.
239. *Grubb G.* Spectral asymptotics for Douglis-Nirenberg elliptic systems and pseudodifferential boundary problems // Commun. Part. Differ. Equat.— 1977.— *2*, № 9.— C. 1071—1150.
240. — Functional calculus of pseudodifferential boundary problems.— Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1986.— 511 c.
241. *Guillemin V., Kazhdan D.* Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds // Proc. Symp. Pure Math. AMS.— 1980.— *36*.— C. 153—180.
242. —, *Melrose R.* The Poisson summation formula for manifolds with boundary // Adv. Math.— 1979.— *32*, № 3.— C. 204—232.
243. *Helffer B.* Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques // Astérisque.— 1984.— *112*.— C. 1—210.
244. —, *Robert D.* Proprietes asymtotiques du spéctre d'une opérateurs pseudodifferentiels sur $\mathbf{R}^n$ // Commun. Part. Differ. Equat.— 1982.— *7*, № 7.— C. 795—882.
245. —, — Comportement semi-classique du spéctre des hamiltoniens quantiques elliptiques // Ann. Inst. Fourier.— 1981.— *31*, № 3.— C. 169—223.
246. —, — Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques // Ann. sci. École mat. Super. Pisa.— 1982.— *IX*, № 3.— C. 405—431.
247. —, *Sjöstrand J.* Résonances en limite semi-classique // Bull. Soc. Math. France.— 1986.— *114*, № 3.— C. 1—228.
248. —, — Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper // Journées des E. D. P. de Saint Jean de Monts.— 1987.— Éxposé № 6.— C. VI—1—VI—9.
249. —, — Structure cantorienne du spéctre de l'opérateur de Harper // Séminair Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique.— 1987—1988.— Éxposé № 12.— C. XII—1—XII—6.
250. *Hörmander L.* The spectral function of elliptic operator // Acta math.— 1968.— *121*.— C. 193—218.
251. — The Weyl calculus of pseudodifferential operators // Commun. Pure and Appl. Math.— 1979.— *32*, № 3.— C. 297—443.
252. — On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudodifferential operators in $\mathbf{R}^n$ // Ark. mat.— 1979.— *17*.— C. 297—313.
253. — On the asymptotic distribution of eigenvalues // Proc. Åke Plejel conference Uppsala. September 6—8, 1979.— C. 146—154.
254. —. The analysis of linear partial differential operators. I—IV.— Berlin e. a. Springer, 1983.— 391 c.; 391 c.; 1985.— 525 c.;— 352 c. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, I—4.— М.: Мир, 1986.— 430 c.; —455 c.; 1987.— 696 c.; 1988.— 446 c.).

255. *Ikeda A.* On the spectrum of a Riemannian manifold of positive constant curvature // Osaka J. Math.— 1980.— *17*, № 1.— С. 75—95.
256. — On lens spaces which are isospectral but not isometric // Ann. sci. École norm. Super.— 1980.— *13*, № 3.— С. 303—315.
257. — On spheric space forms which are isospectral but not isometric // J. Math. Soc. Jap.— 1983.— *35*, № 3.— С. 437—444.
258. *Ishii K.* Localization of eigenstates and transport phenomena in the one dimensional disordered system // Supp. Theor. Phys.— 1973.— *53*.— С. 77—138.
259. *Itô K., McKean H. P.* Diffusion processes and their sample paths.— Berlin: Springer, 1965 (Пер. на рус. яз.: *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М.: Мир, 1968.— 394 с.).
260. *Ivrii V.* Precise spectral asymptotics for elliptic operators // Lect. Notes Math.— 1984.— *1100*.— С. 1—238.
261. — Estimations pour le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateurs de Schrödinger avec potentiels singuliers // C. r. Acad. sci.— 1986.— *302*, № 13.— С. 467—470; № 14.— С. 491—494; № 15.— С. 535—538.
262. *Johnson R.* A review of recent work on almost periodic differential and difference operators // Acta Appl. Math.— 1983.— *1*, № 3.— С. 241—261.
263. —, *Moser J.* The rotation number for almost periodic potentials // Commun. Math. Phys.— 1982.— *84*, № 3.— С. 403—438; Erratum. 1983.— *90*, № 2.— С. 317—318.
264. *Jorgens K. Rellich F.* Eigenwerttheorie gewohnlicher Differentialgleichungen.— Berlin, e. a.: Springer, 1976.
265. —, *Weidmann J.* Spectral properties of Hamiltonian operators // Lect. Notes Math.— 1973.— *319*.— С. 1—148 (Пер. на рус. яз.: *Йоргенс К., Вайдман И.* Спектральные свойства гамильтоновых операторов.— М.: Мир, 1976.— 152 с.).
266. *Kac M.* Probability and related topics in physical sciences.— N. Y.: Interscience, 1958 (Пер. иа рус. яз.: *Кац М.* Вероятность и смежиые вопросы в физике.— М.: Мир, 1965.— 406 с.).
267. — Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly.— 1966.— *73*, № 4.— С. 1—23.
268. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators.— Berlin: Springer, 1966 (Пер. на рус. яз.: *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.).
269. *Kirsch W.* Random Schrödinger operators and the density of states // Lect. Notes Math.— 1985.— *1109*.— С 68—102.
270. —, *Martinelly F.* On the spectrum of a random Schrödinger operator // Commun. Math. Phys.— 1982.— *85*.— С. 329—350.
271. —, — Large deviations and Lifshitz-singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians // Commun. Math. Phys.— 1983.— *89*.— С. 27—40.
272. *Kneser M.* Linear Relationen zwischen Darstellungszahlen quadratischen Formen // Math. Ann.— 1967.— *68*.— С. 31—39.
273. *Kotani S.* Lyapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators // Proc. Taniguchi Symp. Stochastic Analysis. Amsterdam; North-Holland, 1982.— С. 225—247.
274. — Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators // Contemp. Math.— 1986.— *50*.— С. 277—286.
275. *Kunz H., Souillard B.* Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires // Commun. Math. Phys.— 1980.— *79*, № 2.— С. 201—246.
276. *Kuwabara R.* On the isospectral deformation of Riemannian metric // Compos. math.— 1980.— *40*, № 3.— С. 319—324.
277. *Louchard G.* Mouvement Brounien et valeurs propres du laplacien // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1969.— *4*, № 4.— С. 331—343.
278. *Levendorskii S. Z.* The approximate spectral projector method // Acta Appl. Math.— 1986.— *7*.— С. 137—197.

279. — Asymptotic distribution of eigenvalues of differential operators. Holland. Dordrecht. Kluwer: Academic Publishers, 1988.
280. *Lions J.-L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogénes. V. 1.— Paris: Dunod.— 1968 (Пер. на рус. яз.: *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 373 с.).
281. *Majda A., Ralston J.* An analogy of Weyl's formula for unbounded domains // Duke Math. J.— 1978.— *45,* № 1.— С. 83—196; № 3.— С. 513—536; 1979.— *46,* № 3.— С. 725—731.
282. *Martinelli F., Scoppola E.* Introduction to the mathematical theory of Anderson localization. Preprint.— 1986.— 134 с.
283. *Maurin K.* Metody przestreni Hilberta.— Warszawa: PWN, 1959 (Пер. на рус. яз.: *Морен К.* Методы гильбертова пространства.— М.: Мир, 1965.— 572 с.).
284. *McKean H. P.* Selberg's trace formula as applied to a compact Riemannian surface // Commun. Pure and Appl. Math.— 1972.— *25,* № 3.— С. 225—246.
285. —, *Singer I. M.* Curvature and the eigenvalues of the Laplace operator // J. Differ. Geom.— 1967.— *1,* № 1.— С. 43—69.
286. *Melrose R.* Scattering theory and the trace of the wave group // J. Funct. Anal.— 1982.— *45,* № 1.— С. 29—40.
287. *Menikoff A., Sjostrand J.* On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators I, II // Math. Ann.— 1978.— *235.*— С. 55—85; Lect. Notes Math.— 1977.— *755.*— С. 201—247; Ann. Inst. Fourier.— 1980.— *30,* № 2.— С. 109—169.
288. *Metivier G.* Fonction spectral et valeurs propres d'une class d'opérateurs non-elliptiques // Commun. Part. Differ. Equat.— 1976.— *1,* № 4.— С. 465—514.
289. — Valeurs propres de problémes aux limites elliptiques irréguleres // Bull. Soc. Math. France.— 1977.— *51—52.*— С. 125—219.
290. — Valeurs propres d'opérateurs définis par la restriction de systémes variationelles à des sous-espaces // J. math. pures et appl.— 1978.— *57,* № 2.— С. 133—156.
291. — Spectral asymptotics for the ∂-Neumann problem // Duke Math. J.— 1981.— *48,* № 4.— С. 779—806.
292. — Estimates du reste en théorie spectrale // Équat. aux Dériv. Part. Saint-Jean-de Monts.— 1982.— Exp. 1.— С. 1—22.
293. *Micheletti A.-M.* Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace in relazione ad una variazione del campo // Ann. sci. Norm. Sup. Pisa.— 1972.— *26,* № 3.— С. 151—169.
294. *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operators or certain manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1964.— *51,* № 4.— S. 542.
295. *Minakshisundaram S., Plejel A.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds // Canad. J. Math.— 1949.— *1,* № 2.— С. 242—256.
296. *Mohamed A.* Étude spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiple I, II // Ann. Inst. Fourier.— 1982.— *32,* № 3.— С. 39—90; Commun. Part. Differ. Equat.— 1983.— *8,* № 3.— С. 247—316.
297. *Moser J.* An example of a Schrödinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum // Comment. math. helv.— 1981.— *56,* № 2.— С. 198—224.
298. —, *Pöschel J.* An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. math. helv.— 1984.— *59,* № 1.— С. 39—85.
299. *Mott N. F., Twose Q. D.* The theory of impurity conduction // Adv. Phys.— 1961.— *10,* № 1.— С. 107—163 (Пер. на рус. яз.: Успехи физ. наук.— 1963.— *79,* № 5.— С. 591—680).
300. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators // Ann. Math.— 1936.— *37.*— С. 116—229.

301. *Oleinik O. A.* Homogenization problems in elasticity. Spectra of singularly perturbed operators // London Math. Soc. Lect. Notes. Ser.— 1987.— *122.*— C. 53—95.
302. *Ozava S.* An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian under singular perturbation of domain // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1983. — *30*, № 2.— C. 243—257.
303. *Pastur L. A.* Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation // Commun. Math. Phys.— 1980.— *77*, № 1.— C. 179—196.
304. — Spectral properties of random and almost periodic differential and finite difference operators // Statistical Physics and Dynamic systems.— Boston e. a.: Birkhäuser, 1985.— C. 49—67.
305. — Spectral properties of random and almost periodic operators // Sov. Sci. Rev. C. Maths/Phys.— 1987.— *6*.— C. 1—112.
306. —, *Figotin A. L.* An exactly solvable model of a multidimensional incommensurate structure // Commun. Math. Phys.— 1984.— *95*, № 2.— C. 401—425.
307. *Patodi V. K.* Curvature and the eigenforms of the Laplace operator // J. Differ. Geom.— 1971.— *5*, № 3.— C. 233—249.
308. *Perry P. A.* Exponential bounds and semifiniteness of point spectrum for n-body Schrödinger operators // Commun. Math. Phys.— 1984.— *92*, № 2.— C. 481—483.
309. *Petkov V., Stojanov L.* On the number of periodic reflecting rays in general domains // Ergodic Theory and Dyn. Syst.— 1988.— *8*, № 1.— C. 81—91.
310. *Pöschel J.* Examples of discrete Schrödinger operators with pure point spectrum // Commun Math. Phys.— 1983.— *88*, № 4.— C. 447—463.
311. *Rauch J.* Perturbation theory for eigenvalues and resonances of Schrödinger hamiltonians // J. Funct. Anal.— 1980.— *35*, № 3.— C. 304—315.
312. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. I—IV. N. Y.: Academic Press, 1972.— 380 c; 1975.— 422 c.; 1979.— 478 c.;— 1978—464 c.) (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, 1—4.— М.: Мир, 1977.— 357 с.; 1978.— 395 с.; 1982.— 443 с.; 1982.— 428 с.).
313. *Robert D.* Comportement asymptotiques des valeurs propres d'opérateurs du type Schrödinger à potentiel dégénéré // J. math. pures et appl.— 1982.— *61*.— C. 275—300.
314. *Royer G.* Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1980.— *B16*.— C. 49—62.
315. *Rüssmann H.* On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential // Ann. N. Y. Acad. sci.— 1980.— *357*.— C. 90—107.
316. *Safarov Ju. G.* On the spectral asymptotics of the transmission problem // Acta Appl. Math.— 1987.— *10*, № 1.— C. 101—130.
317. *Sanches-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory.— N. Y.: Springer, 1980.— 427 c. (Пер. на рус. яз.: *Санчес-Паленсиа Э.* Неоднородная среда и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.— 472 с.).
318. *Seeley R. T.* Complex powers of an elliptic operator // Proc. Symp. Pure Math.— 1967.— *10*.— C. 288—307.
319. — Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary value problems // Amer. J. Math.— 1969.— *91*, № 6.— C. 963—983.
320. — A sharp asymptotic estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbf{R}^3$ // Adv. Math.— 1978.— *29*, № 3.— C. 244—264.
321. — An estimate near the boundary for the spectral function of the Laplace operator // Amer. J. Math.— 1980.— *102*, № 3.— C. 869—902.
322. *Serr J.-P.* Cours d'arithmétique.— Paris: Presses Univers., 1970 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Курс арифметики.— М.: Мир, 1972.— 184 с.).
323. *Simon B.* Almost periodic Schrödinger operators: a review // Adv. Appl. Math.— 1982.— *3*, № 3.— C. 463—490.
324. —. Nonclassical eigenvalue asymptotics // J. Funct. Anal.— 1983.— *53*, № 1.— C. 84—98.

325. — Semiclassical analysis of low-lying eigenvalues // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1983.— *38*, № 2.— C. 295—307; Ann. Math.— 1984.— *120*.— C. 89—118; Ann. Phys.— 1984.— *158*.— № 1.— C. 84—98.
326. — Almost periodic Schrödinger operator. IV. The Maryland model // Ann. Phys.— 1985.— *159*, № 1.— C. 157—183.
327. — Internal Lifschitz tails // J. Statist. Phys.— 1987.— *46*, № 5/6.— C. 911—918.
328. —, *Taylor M.* Harmonic analysis on SL(2, R) and smoothness of the density of states in the one dimensional Anderson model // Commun. Math. Phys.— 1985.— *101*, № 1.— C. 1—19.
329. —, —, *Wolff T.* Some rigorous results for the Anderson model // Phys. Rev. Lett.— 1985.— *54*, № 14.— C. 1589—1592.
330. —, *Wolff T.* Singular continuous spectrum under rank one perturbation and localization for random potentials // Commun. Pure Appl. Math.— 1986.— *39*, № 1.— C. 75—90.
331. *Sinai Ja. G.* Anderson localization for one dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential // J. Statist. Phys.— 1987.— *46*, № 5/6.— C. 861—909.
332. *Singer I. M.* The geometry of spectrum // Proc. Int. Congr. Math. Vancouver.— 1974.— C. 187—200.
333. *Smith L.* The asymptotics of the heat equation for a boundary value problem // Invent. math.— 1981.— *65*, № 3.— C. 467—493.
334. *Souillard B.* Spectral properties of discrete and continuous random Schrödinger operators: a review // Preprint, 1986, 13 c.
335. *Spencer T.* The Schrödinger equation with a random potential — a mathematical review // Critical phnomena, random systems, gauge theories. Les Houches. XLIII ed. by *Osterwalder K., Stora R.*,— 1984.
336. *Stanton N., Tartakoff D.* The heat equation for the $\bar{\partial}$ Laplacian // Commun. Part. Differ. Equat.— 1984.— *9*, № 7.— C. 597—686.
337. *Tamura H.* Asymptotic formula with remainder estimate for bound states of Schrödinger operator // J. Anal. Math.— 1981.— *40*.— C. 166—182; 1982.— *41*.— C. 85—108.
338. — Asymptotic formulae with remainder estimates for eigenvalues of Schrödinger operators // Commun. Part. Differ. Equat.— 1982.— *7*, № 1.— C. 1—53.
339. — The asymptotic formula for the number of bound states in the strong coupling limit // J. Math. Soc. Jap.— 1984.— *30*, № 3.— C. 355—374.
340. *Tanikawa M.* The spectrum of Laplacian and smooth deformation of Riemannian metric // Proc. Jap. Acad., Ser. A.— 1979.— *55*, № 4.— C. 125—127.
341. *Tanno S.* A characterisation of canonic sphers by the spectrum // Math. Z.— 1980.— *175*, № 3.— C. 267—274.
342. *Taylor M. E.* Pseudodifferential operators.— Princeton N. J.: Princeton Univ. Press, 1981.— 454 c. (Пер. на рус. яз.: *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы.— М.: Мир, 1985.— 470 с.).
343. *Thomas L. E.* Time dependent approach to scattering from impurities in a cristall // Commun. Math. Phys.— 1973.— *33*, № 4.— C. 335—343.
344. *Thouless D.* A relation between the density of states and range of localization for one-dimensional random systems // J. Phys. C.— 5.— C. 77—81.
345. *Titchmarsh E.* Eigenfunction expansions associated with second order differential equations — Oxford: Oxford Univ. Press, 1946. (пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функцням, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. 1, 2.— М.: ИЛ, 1960.— 278 с., 1961.— 555 с.).
346. *Trèves F.* Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. 1, 2.— N. Y., London: Plenum Press, 1982.— 338 c.; 374 c. (Перев. на рус. яз. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. 1, 2.— М.: Мир, 1984.— 358 с.; 398 с.).

347. *Urakawa H.* Bounded domains which are isospectral but not congruent // Ann. sci. École norm. Super.— 1982.— *15,* № 3.— С. 441—456.
348. *Vignéras M.-R.* Variétes riemannienes isospectrales et non isométriques // Ann. Math.— 1980.— *112,* № 1.— С. 21—32.
349. *Weyl H.* Gas asymptotische Verteilungsgesätz der Eigenverte linearer partieller Differentialgleichungen // Math. Ann.— *71.*— С. 441—479.
350. — Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von der Begrenzung // J. reine angew. Math.— 1912.— *141.*— С. 1—11.
351. *Witt E.* Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grad // Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.— 1941.— *14.*— С. 323—337.
352. *Wolpert S.* The eigenvalue spectrum as moduli for flat tori // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— *244.*— С. 313—319.
353. — The length spectra as moduli for compact Riemannian surfaces // Ann. Math.— 1979.— *109,* № 2.— С. 323—351.
354. *Ziman J. M.* Principles of the theory of solids.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972. (Пер. на рус. яз.: *Займан Дж.* Прииципы твердого тела. М.: Мир, 1974.— 472 с.).
355. — Models of disorder. The theoretical physics of homogeneously disordered systems.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. (Пер. на рус. яз.: *Займан Дж.* Модели беспорядка. Теоретическая фнзика однородно неупорядоченных систем.— М.: Мнр, 1982.— 592 с.).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОПЕЧАТКИ

ИНТ, Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 64, 1989 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
21	13 снизу	$TT'=T^*X\setminus\{0\}$	$T'X=T^*X=T^*X\setminus\{0\}$
43	3 снизу	спектна	спектра
90	3 снизу	dX	∂X

Зак. 5645

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 517.951+517.954+517.956.227+517.984
Г. В. Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин. **Спектральная теория дифференциальных операторов.** Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. — 1989, *64*, — С. 1—242

Статья представляет собой обзор современной спектральной теории дифференциальных операторов в частных производиых. Обсуждаются вопросы о самосопряженности таких операторов, о характере их спектра, Описаны различные методы получения спектральных асимптотик и имеющиеся формулы асимптотик спектральной функции и собственных значений. Изложены методы явного нахождения спектра. Описаны методы спектральной теории операторов с периодическими, почти-периодическими и случайными коэффициентами. Дан обзор спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, близких к самосопряженным. Библ. 355.

Технический редактор *З. А. Прусакова* Корректор *З. К. Медведева*

Сдано в набор 20.07.89 Подписано в печать 04.12.89
Формат бумаги 60×90 1/16. Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 15,5 Усл. кр.-отт. 15,5 Уч.-изд. л. 15,60
Тираж 1300 экз. Заказ 5645 Цена 2 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-29
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56864

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 64. 1989. 1—248.